# B 演習解答

**演習 2.1** 平均は $(\cancel{4}+\cancel{2}+\cancel{1}+\cancel{4}-\cancel{9}-\cancel{8}-\cancel{4}+\cancel{4}+\cancel{6}-3-1-8)\div 12=-1$ であり，分散は $\{(4+1)^2+(2+1)^2+(1+1)^2+(4+1)^2+(-9+1)^2+(-8+1)^2+(-4+1)^2+(4+1)^2+(6+1)^2+(-3+1)^2+(-1+1)^2+(-8+1)^2\}\div 12=(25+9+4+25+64+49+9+25+49+4+0+49)\div 12=(75+18+8+64+147)\div 12=(90+222)\div 12=312\div 12=26$, 標準偏差は $\sqrt{26}$ である．

**演習 2.2**

(1) $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\frac{2}{n}(\bar{x}-a)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-a)^2$ であり，

公式 1(p.8) より第 2 項は 0．第 3 項は $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-a)^2=\frac{1}{n}n(\bar{x}-a)^2=(\bar{x}-a)^2$.

第 1 項は定義から $s_{xx}$ だから証明できた．

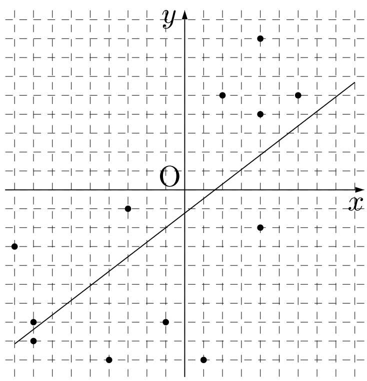
(2) 公式 3(p.9) において，$a=5$ として，両辺に $n$ をかけると，

$\displaystyle \sum_{i=1}^{n}(x_i-5)^2=ns_{xx}+n(\bar{x}-5)^2$ である．これに，$\displaystyle \sum_{i=1}^{n}(x_i-5)^2=273$, $s_{xx}=12$, $\bar{x}=8$ を代入すると，$273=12n+3^2n$．これより，$n=13$.

**演習 2.3** $x_i=5y_i+m$ だから 公式 2(p.9) より，$\bar{x}=5\bar{y}+m=40+m$, $s_{xx}=5^2s_{yy}=225$．$\bar{x}$ は最低点 $m$ より 40 点高い．

**演習 2.4** $n=3+8+6+2+1=20$ なので，$\bar{x}\doteqdot(1\times 3+3\times 8+5\times 6+7\times 2+9\times 1)\div 20=4$, $s_{xx}\doteqdot\{(1-4)^2\times 3+(3-4)^2\times 8+(5-4)^2\times 6+(7-4)^2\times 2+(9-4)^2\times 1\}\div 20=4.2$

**演習 2.5**




演習 **2.1**(p.11) の結果から，$\bar{x}=-1$, $s_{xx}=26$, $s_x=\sqrt{26}$. $y$ についても同様に計算すると，$\bar{y}=-2$, $s_{yy}=35$, $s_y=\sqrt{35}$, となる．また，共分散も定義通り計算すると，$s_{xy}=20$ となり，これらより，

$$
\begin{aligned}
r_{xy}&=\frac{20}{\sqrt{26\times 35}}=2\sqrt{\frac{10}{91}}=0.6629,\\
\hat{a}&=\frac{20}{26}=\frac{10}{13}=0.769231,\\
\hat{b}&=-2-(-1)\frac{10}{13}=-\frac{16}{13}=-1.23077
\end{aligned}
$$

**演習 2.6** まず,

$$
\begin{aligned}
(x_i - a)(y_i - b) &= (x_i - \bar{x} + \bar{x} - a)(y_i - \bar{y} + \bar{y} - b) \\
&=(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + (\bar{y} - b)(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - a)(y_i - \bar{y}) + (\bar{x} - a)(\bar{y} - b)
\end{aligned}
$$

であり，公式 1(p.8) より，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}) = 0$ なので，上の式の両辺を $i = 1$ から $n$ まで加えると，

$$
\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)(y_i - b) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + n(\bar{x} - a)(\bar{y} - b).
$$

共分散の定義に注意して，この両辺を $n$ でわると

$$
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)(y_i - b) = s_{xy} + (\bar{x} - a)(\bar{y} - b).
$$

**演習 2.7**

(1) 分散の定義から，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = ns_{xx}$. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = ns_y^2$.
また，共分散の定義から，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_iY_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = ns_{xy}$.

(2) (1) の結果を使うと，

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{n}\left\{t^2\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2t\sum_{i=1}^{n} X_iY_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right\} \\
&= \frac{1}{n}\left\{t^2 ns_{xx} - 2tns_{xy} + ns_y^2\right\} = s_{xx}t^2 - 2s_{xy}t + s_y^2.
\end{aligned}
$$

$f(t) = s_{xx}(t - \frac{s_{xy}}{s_{xx}})^2 - \frac{s_{xy}^2}{s_{xx}} + s_y^2$ だから，$t = s_{xy}/s_{xx}$ のとき，最小値 $-\frac{s_{xy}^2}{s_{xx}} + s_y^2$ をとる．つまり，$t_0 = s_{xy}/s_{xx}$.

(3) $f(t_0) = -\frac{s_{xy}^2}{s_{xx}} + s_y^2$，$f(t_0) \geqq 0$ より，$s_y^2 - \frac{s_{xy}^2}{s_{xx}} \geqq 0$．これより，$\frac{s_{xy}^2}{s_{xx}s_y^2} \leqq 1$．つまり，$r_{xy}^2 \leqq 1$. したがって，$|r_{xy}| \leqq 1$.

(4) $r_{xy}$ の定義から，$s_x = 0$ または $s_y = 0$ の時は $r_{xy} = \pm\infty$ となるので，$s_x > 0$ かつ $s_y > 0$ として考える．$f(t_0) = s_y^2(1 - r_{xy}^2)$ と変形できるので，$f(t_0) = 0$ と $r_{xy}^2 = 1$ は同値である．さらに，$f(t_0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_it_0 - Y_i)^2$ だから，$f(t_0) = 0$

ならば任意の $i=1,\ldots,n$ に対して $X_i t_0 - Y_i = 0$ でなければならない．したがって，$f(t_0)=0$ と任意の $i=1,\ldots,n$ に対して，$X_i t_0 = Y_i$ が同値である．これを $X_i, Y_i$ を $x_i\bar{x}, y_i-\bar{y}$ で表すと，$t_0(x_i-\bar{x}) = y_i-\bar{y}$．したがって，$r_{xy}=\pm 1$ と任意の $i=1,\ldots,n$ に対して，$y_i = t_0(x_i-\bar{x})+\bar{y}$ が同値である．これは，すべての点 $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ が直線 $y=t_0(x-\bar{x})+\bar{y}$ 上にあることを意味している．

**演習 2.8**　公式 3(p.9) より，

$$F(a) = n \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2 = n\left\{s_{xx}+(a-\bar{x})^2\right\}$$

だから，$a=\bar{x}$ のとき最小値 $ns_{xx}$ をとる．

次に，$x_1$, …, $x_n$ を小さい順に並び替えたものを $x_{(1)} \leqq x_{(2)} \leqq \cdots \leqq x_{(n)}$ とすると，$G(a)=\sum_{i=1}^{n}|x_{(i)}-a|$ と表すこともできるので，

$$G(a) = \begin{cases} -na+\sum_{i=1}^{n} x_{(i)} & (a < x_{(1)}) \\ (n-2j)a + \sum_{i=1}^{j} x_{(i)} - \sum_{i=j+1}^{n} x_{(i)} & (x_{(j)} \leqq a < x_{(j+1)}) \\ na - \sum_{i=1}^{n} x_{(i)} & (x_{(n)} \leqq a) \end{cases}$$

であることがわかる．したがって，$j<n/2$ を満たす最大の $j$ を $j_0$，$j>n/2$ を満たす最小の $j$ を $j_1$ とすると，$a<x_{(j_0+1)}$ の時単調減少，$x_{(j_1)} \leqq a$ の時単調増加であることがわかる．

$n=2m$ の時は，$j_0=m-1, j_1=m+1$ であり，$a<x_{(m)}$ の時単調減少，$x_{(m+1)} \leqq a$ の時単調増加である．$x_{(m)} \leqq a < x_{(m+1)}$ の時は，$F(a)=\sum_{i=1}^{m} x_{(i)} - \sum_{i=m+1}^{n} x_{(i)}$ なので，これが最小値.

$n=2m-1$ の時は，$j_0=m-1, j_1=m$ であり，$a<x_{(m)}$ の時単調減少，$x_{(m)} \leqq a$ の時単調増加である．したがって，$a=x_{(m)}$ の時最小値 $2(m-1)x_{(m)} + \sum_{i=1}^{m-1} x_{(i)} - \sum_{i=m+1}^{n} x_{(i)}$ をとる．

**演習 2.9**　$X_i = x_i-\bar{x}, Y_i=y_i-\bar{y}, C=a\bar{x}+b\bar{y}+c$ とおくと，

$$\begin{aligned} T(a,b,c) =& \sum_{i=1}^{n}\frac{(ax_i+by_i+c)^2}{a^2+b^2} \\ =& \frac{1}{a^2+b^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{a(x_i-\bar{x})+b(y_i-\bar{y})+(a\bar{x}+b\bar{y}+c)\right\}^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{a^2+b^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{a^2X_i^2+b^2Y_i^2+C^2+2abX_iY_i+2aX_iC+2bY_iC\right\}\\
&=\frac{n}{a^2+b^2}\left\{s_{xx}a^2+s_y^2b^2+2s_xyab+C^2\right\}
\end{aligned}
$$

であり，$T(a,b,c)$ を最小にするためには，まず，$C=0$，つまり，$c=-\bar{x}a-\bar{y}b$ が必要である．そのとき，$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
T=&\frac{n}{a^2+b^2}\left\{s_{xx}a^2+s_y^2b^2+2s_xyab\right\}\\
=&n\left\{s_{xx}\cos^2\theta+s_y^2\sin^2\theta+2s_{xy}\sin\theta\cos\theta\right\}\\
=&n\left\{\frac{s_{xx}-s_y^2}{2}\cos 2\theta+s_{xy}\sin 2\theta+\frac{1}{2}(s_{xx}+s_y^2)\right\}.
\end{aligned}
$$

$n=12,\ \bar{x}=-1,\ \bar{y}=-2,\ s_{xx}=26,\ s_y^2=35,\ s_{xy}=20$ だったので，

$$
T=\frac{12}{a^2+b^2}\left\{26a^2+35b^2+40ab+(-a-2b+c)^2\right\}
$$

である．$C=0$ のとき，$c=a+2b$ であり，$T$ を $\theta$ で表すと，

$$
T=12\left\{-\frac{9}{2}\cos 2\theta+20\sin 2\theta+\frac{61}{2}\right\}.
$$

したがって，

$$
(\cos 2\theta,\sin 2\theta)=\pm\frac{1}{\sqrt{20^2+(9/2)^2}}(20,\frac{9}{2})=\pm\left(\frac{40}{41},\frac{9}{41}\right)
$$

の時，最小値 $12\left(0+\dfrac{61}{2}\right)=366$ をとることがわかる．

$$
\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\frac{2a^2}{a^2+b^2}-1,\quad \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\frac{ab}{a^2+b^2}
$$

だから，

$$
\frac{2a^2}{a^2+b^2}=\left(1\pm\frac{40}{41}\right),\quad \frac{2ab}{a^2+b^2}=\pm\frac{9}{41}
$$

つまり，

$$
a=9b, c=11b, \text{または}, a=-\frac{1}{9}b, c=\frac{17}{9}b
$$

のとき，$T$ は最小値 366 をとる．

**演習 3.1**

$$P(X=3) = {}_{10}C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-3} = \frac{10!}{7!\cdot 3!}\frac{1}{2^{10}} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 2^{10}} = \frac{15}{128}.$$
$$P(X \leqq 3) = \frac{{}_{10}C_0 + {}_{10}C_1 + {}_{10}C_2 + {}_{10}C_3}{2^{10}} = \frac{176}{2^{10}} = \frac{11}{64}.$$

したがって，$P(X \geqq 4) = 1 - \dfrac{11}{64} = \dfrac{53}{64}$.

**演習 3.2**　$f(x)$ が p.d.f. であるためには，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ が必要．したがって，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{1}(2x^2+a)dx = 2\left[\frac{2}{3}x^3 + ax\right]_0^1 = 2\left(\frac{2}{3}+a\right) = 1.$$

よって，$a = -\frac{1}{6}$ が必要．このとき，$f(x) = 2x^2 - \frac{1}{6}$ であり，$f(0) = -\frac{1}{6} < 0$ だから，p.d.f. の条件を満たさない．よって，$f(x)$ は p.d.f. となることはない．

**演習 3.3**　公式 11(p.18) から $h(a) = V[X] + (a - E[X])^2$ であり，$a = E[X]$ のとき，最小値 $V[X]$ をとることがわかる．

**演習 3.4**　$X \sim p_k$ なので，

$$\begin{aligned}E[ah(X)+bg(X)] &= \sum_{k=0}^{\infty}\{ah(k)+bg(k)\}p_k \\ &= a\sum_{k=0}^{\infty}h(k)p_k + g\sum_{k=0}^{\infty}g(k)p_k = aE[h(X)] + bE[g(X)].\end{aligned}$$

**演習 3.5**　公式 8(p.18)　より，$E[X(X-1)] + E[X] - \{E[X]\}^2 = E[X^2] - E[X] + E[X] - \{E[X]\}^2 = E[X^2] - \{E[X]\}^2 = V[X]$.

**演習 3.6**　$P(X=0) = \frac{1}{6}$, $P(X=1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(X=2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(X=3) = \frac{1}{6}$ だから，

$$\begin{aligned}E[X] &= 0\times\frac{1}{6} + 1\times\frac{1}{3} + 2\times\frac{1}{3} + 3\times\frac{1}{6} = \frac{3}{2}, \\ E[X^2] &= 0^2\times\frac{1}{6} + 1^2\times\frac{1}{3} + 2^2\times\frac{1}{3} + 3^2\times\frac{1}{6} = \frac{19}{6}, \\ V[X] &= E[X^2] - \{E[X]\}^2 = \frac{19}{6} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{11}{12},\end{aligned}$$

$$E[4X+1] = 4E[X] + 1 = 4\times\frac{3}{2} + 1 = 7, \qquad \text{（公式 8(p.18)　と 公式 9(p.18)）}$$
$$V[4X+1] = 4^2V[X] = 16\times\frac{11}{12} = \frac{44}{3}. \qquad \text{（公式 12(p.19)）}$$

**演習 3.7**　$X \sim f(x)$ だから，$M_X(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$ であり，

$$M_X'(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} e^{tx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xe^{tx} f(x)dx,$$
$$M_X''(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{tx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} xe^{tx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{tx} f(x)dx.$$

これを続けると

$$\frac{d^m}{dt^m} M_X(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} x^{m-1} e^{tx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} x^{m-1} e^{tx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{tx} f(x)dx.$$

これらの得られた式に $t = 0$ を代入すると，

$$M_X'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} xe^{0\times x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = E[X],$$
$$M_X''(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{0\times x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = E[X^2],$$
$$\frac{d^m}{dt^m} M_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{0\times x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x)dx = E[X^m].$$

**演習 3.8**

$$M_X'(t) = -\alpha(1-\beta t)^{-\alpha-1}(-\beta) = \alpha\beta(1-\beta t)^{-\alpha-1},$$
$$M_X''(t) = \alpha\beta(-\alpha-1)(-\beta)(1-\beta t)^{-\alpha-2} = \alpha(\alpha+1)\beta^2(1-\beta t)^{-\alpha-2}.$$

したがって, 公式 14(p.20)　より

$$E[X] = M_X'(0) = \alpha\beta(1-\beta\times 0)^{-\alpha-1} = \alpha\beta,$$
$$E[X^2] = M_X''(0) = \alpha(\alpha+1)\beta^2(1-\beta\times 0)^{-\alpha-2} = \mu^2+\sigma^2 = \alpha(\alpha+1)\beta^2.$$

分散公式 (公式 11(p.18) ) より，$V[X] = \alpha(\alpha+1)\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2$.

**演習 3.9**

$$M_X'(t) = e^{\mu t+\frac{\sigma^2}{2}t^2}(\mu+\sigma^2 t),\quad M_X''(t) = e^{\mu t+\frac{\sigma^2}{2}t^2}(\mu+\sigma^2 t)^2 + e^{\mu t+\frac{\sigma^2}{2}t^2}\sigma^2.$$

したがって, 公式 14(p.20)　より

$$E[X] = M_X'(0) = e^0(\mu+\sigma^2\times 0) = \mu,$$
$$E[X^2] = M_X''(0) = e^0(\mu+\sigma^2\times 0)^2 + e^0\sigma^2 = \mu^2+\sigma^2.$$

分散公式 (公式 11(p.18) ) より, $V[X] = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$.

**演習 3.10**

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} q p^k = \sum_{k=0}^{\infty} q(pe^t)^k$$

この和は初項 $q$，公比 $pe^t$ の等比数列の級数なので，$pe^t < 1$ の時，予備知識 0.1(4) より $M_X(t) = \frac{q}{1-pe^t}$. $pe^t < 1$ の時，$t < -\log p$ であり，$0 < p < 1$ に対して $-\log p > 0$ だから，$M_X(t)$ は $t = 0$ を含む区間で定義できている．求められた $M_X(t)$ を微分して $t = 0$ を代入する．

$$\begin{aligned}
M_X'(t) =& q(-1)(1-pe^t)^{-1-1}(-pe^t) = qpe^t(1-pe^t)^{-2}, \\
M_X''(t) =& qpe^t(1-pe^t)^{-2} + qpe^t(-2)(1-pe^t)^{-2-1}(-pe^t) \\
=& qpe^t(1-pe^t)^{-2}\left\{1 + 2pe^t(1-pe^t)^{-1}\right\}, \\
M_X'(0) =& E[X] = qpe^0(1-pe^0)^{-2} = qp(1-p)^{-2} = \frac{p}{q}, \\
M_X''(0) =& E[X^2] = qpe^0(1-pe^0)^{-2}\left\{1 + 2pe^0(1-pe^0)^{-1}\right\} = \frac{p}{q}\left(1 + 2\frac{p}{q}\right), \\
V[X] =& \frac{p}{q}\left(1 + 2\frac{p}{q}\right) - \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p}{q}\left(1 + \frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q^2}.
\end{aligned}$$

**演習 3.11**

$$\begin{aligned}
E[X+1] =& \sum_{k=0}^{\infty} \frac{18}{(k+2)(k+3)(k+4)} \\
=& \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{9}{(k+2)(k+3)} - \frac{9}{(k+3)(k+4)}\right) \\
=& \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{2\times 3)} - \frac{9}{(n+3)(n+4)}\right) = \frac{3}{2}. \\
E[(X+1)(X+2)] =& \sum_{k=0}^{\infty} \frac{18}{(k+3)(k+4)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{18}{k+3} - \frac{18}{k+4}\right) \\
=& \lim_{n\to\infty} \left(\frac{18}{3} - \frac{18}{n+4}\right) = 6.
\end{aligned}$$

これらから，$E[X+1] = E[X] + 1 = \frac{3}{2}$, $E[(X+1)(X+2)] = E[X^2] + 3E[X] + 2 = 6$. よって，$E[X] = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$, $E[X^2] = 6 - \frac{3}{2} - 2 = \frac{5}{2}$. これらより，$V[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$.

**演習 3.12** 部分積分の公式 (予備知識 0.3(5)) と $x \to \infty$ の時の $x^n$ の無限大への発散と $e^{-ax}$ の 0 への収束の比較 (予備知識 0.2(11)) から,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty xe^{-ax}dx &= \left[-\frac{1}{a}xe^{-ax}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{a}\right)e^{-ax}dx \\ &= \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-ax}dx = \frac{1}{a}\left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_0^\infty = \frac{1}{a^2}.\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^2e^{-ax}dx &= \left[-\frac{1}{a}x^2e^{-ax}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{2}{a}\right)xe^{-ax}dx \\ &= \frac{2}{a}\int_0^\infty xe^{-ax}dx = \frac{2}{a}\cdot\frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^3}.\end{aligned}$$

いま，$f(-x) = f(x)$ に注意すると,

$$\begin{aligned}E[X] &= \int_{-\infty}^\infty xf(x)dx = \int_{-\infty}^0 xf(x)dx + \int_0^\infty xf(x)dx \\ &= \int_\infty^0 (-t)f(-t)(-dt) + \int_0^\infty xf(x)dx = -\int_0^\infty tf(t)dt + \int_0^\infty xf(x)dx \\ &= -\frac{a}{2}\int_0^\infty te^{-at}dt + \frac{a}{2}\int_0^\infty xe^{-ax}dx = -\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{a^2} + \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{a^2} = 0.\end{aligned}$$

分散公式 (公式 3(p.9) ) より

$$\begin{aligned}V[X] &= E[X^2] - \{E[X]\}^2 = E[X^2] - 0^2 \\ &= \int_{-\infty}^\infty x^2f(x)dx = \int_{-\infty}^0 x^2f(x)dx + \int_0^\infty x^2f(x)dx \\ &= \int_\infty^0 (-t)^2f(-t)(-dt) + \int_0^\infty x^2f(x)dx = 2\int_0^\infty x^2f(x)dx \\ &= 2\cdot\frac{a}{2}\int_0^\infty x^2e^{-ax}dx = 2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{a^3} = \frac{2}{a^2}.\end{aligned}$$

最後に,

$$\begin{aligned}M_X(t) &= \int_{-\infty}^\infty e^{tx}\frac{a}{2}e^{-a|x|}dx = \int_{-\infty}^0 e^{tx}\frac{a}{2}e^{ax}dx + \int_0^\infty e^{tx}\frac{a}{2}e^{-ax}dx \\ &= \frac{a}{2}\left[\frac{1}{t+a}e^{(t+a)x}\right]_{-\infty}^0 + \frac{a}{2}\left[\frac{1}{t-a}e^{(t-a)x}\right]_0^\infty\end{aligned}$$

$t+a>0$ かつ $t-a<0$ の時，つまり，$-a<t<a$ の時,

$$= \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{t+a} - \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{t-a} = \frac{a^2}{a^2-t^2}.$$

**演習 3.13**

(1) まず，$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx = 1$ より，$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = 1 - g(a)$ であり，$\int_{-\infty}^{a} xf(x)dx + \int_{a}^{\infty} xf(x)dx = \mu_X$ より，$\int_{a}^{\infty} xf(x)dx = \mu_X - m(a)$ であることに注意しよう．これを使うと，

$$\begin{aligned}h(a) =& \int_{-\infty}^{\infty} |x-a|f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} (a-x)f(x)dx + \int_{a}^{\infty} (x-a)f(x)dx \\ =& a\int_{-\infty}^{a} f(x) - \int_{-\infty}^{a} xf(x)dx + \int_{a}^{\infty} xf(x)dx - a\int_{a}^{\infty} f(x)dx \\ =& ag(a) - m(a) + \mu_X - m(a) - a(1-g(a)) = 2ag(a) - 2m(a) - a + \mu_X.\end{aligned}$$

(2) $g'(a) = f(a)$, $m'(a) = af(a)$ であることを使うと，

$$\begin{aligned}h'(a) =& 2g(a) + 2ag'(a) - 2m'(a) - 1 = 2g(a) + 2af(a) - 2af(a) - 1 = 2g(a) - 1, \\ h''(a) =& 2g'(a) = 2f(a).\end{aligned}$$

$f(a) \geqq 0$ より $h''(a) \geqq 0$. また，$h'(a) = 0$ のとき，$g(a) = \frac{1}{2}$. つまり，$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \frac{1}{2}$ を満たすとき，$h'(a) = 0$ とする．

(3) 上の結果より，$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \frac{1}{2}$ を満たす $a$ の値を $a_0$ とすると，$h'(a_0) = 0$ である．また，任意の $a$ に対して $h''(a) \geqq 0$ だから， $h'(a)$ は単調増加である．したがって，$a < a_0$ のとき $h'(a) \leqq 0$ であり $h(a)$ は単調減少，$a > a_0$ のとき $h'(a) \geqq 0$ であり $h(a)$ は単調増加である．つまり，$a = a_0$ のとき $h(a)$ は最小値をとる．通常，$a_0$ を中央値と呼ぶ.

**演習 3.14** 一辺の長さが 1 である正方形を $S$，$S$ をその中心方向に相似縮小した正方形を $S'$ とする．つまり，対角線が $S$ の対角線上にあり，交点が同じ点である，$S$ の内部に含まれる正方形を $S'$ とする．$S'$ の一辺の長さを $\ell$ とすると，$0 \leqq \ell \leqq 1$ である．無作為に選んだ点を $A$ とすると，$A$ が $S'$ に入る確率 $P(A \in S')$ は，$S$ の面積が 1 だから，$S'$ の面積 $\ell^2$ となる．$X > a$ となるのは，$\ell = 1-2a$ であるような $S'$ の内部に $A$ が含まれる時で，$P(X > a) = P(A \in S') = \ell^2 = (1-2a)^2$. ただし，$0 < a < \frac{1}{2}$. これを使うと，$P(a < X < b) = P(a < X) - P(b \leqq X) = (1-2a)^2 - (1-2b)^2 = 4(b-a)(1-a-b)$. $X$ の p.d.f. を $f(x)$ とすると，$P(X \leqq a) = \int_{0}^{a} f(x)dx$ であるが，$P(X \leqq a) = 1 - P(X > a) = 1-(1-2a)^2 = 4a-4a^2$ だから，$\int_{0}^{a} f(x)dx = 4a-4a^2$.

したがって，$f(a) = (4a - 4a^2)' = 4 - 8a$.

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x(4-8x)dx = \left[2x^2 - \frac{8}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}, \\
E[X^2] &= \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2(4-8x)dx = \left[\frac{4}{3}x^3 - 2x^4\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24}, \\
V[X] &= \frac{1}{24} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{72}.
\end{aligned}
$$

## 演習 3.15

(1) $r_0 + r_1 e^t = 0 \cdots$① の両辺を $t$ で微分すると $r_1 e^t = 0$ となり，$t = 0$ を 代入すると $r_1 = 0$．これを ① に代入すると $r_0 = 0$ となる．

(2) 『任意の $t \in I$ に対して，$r_0 + r_1 e^t + \cdots + r_m e^{mt} = 0$ ならば $r_0 = \cdots = r_m = 0$ が成り立つ $\cdots$②』と仮定する．この仮定の下で，任意の $t \in I$ に対して，$r_0 + r_1 e^t + \cdots + r_m e^{mt} + r_{m+1} e^{(m+1)t} = 0 \cdots$③ が成り立つものとして，この両辺を $t$ で微分すると，$r_1 e^t + 2r_2 e^{2t} + \cdots + mr_m e^{mt} + (m+1)r_{m+1}e^{(m+1)t} = 0$ となる．両辺を $e^t$ で割ると，$r_1 + 2r_2 e^t + \cdots + mr_m e^{(m-1)t} + (m+1)r_{m+1}e^{mt} = 0$ が成り立つ．② の仮定から，$r_1 = 2r_2 = \cdots = mr_m = (m+1)r_{m+1} = 0$ となり，$r_1 = r_2 = \cdots = r_m = r_{m+1} = 0$ が導かれる．これを ③ に代入すると，$r_0 = 0$ となり，結局，$r_0 = r_1 = \cdots = r_{m+1} = 0$ となる．帰納法により，任意の $n$ ごとに，任意の $t \in I$ に対して，$r_0 + r_1 e^t + \cdots + r_n e^{nt} = 0$ ならば $r_0 = r_1 = \cdots = r_n = 0$ となることが証明された．

(3) 任意の $t \in I$ に対して，$M_X(t) = M_Y(t)$ なので，$M_X(t) - M_Y(t) = (p_0 - q_0) + (p_1 - q_1)e^t + \cdots + (p_n - q_n)e^{nt} = 0$．(2) から $p_0 - q_0 = p_1 - q_1 = \cdots = p_n - q_n = 0$ が導かれ，証明ができた．

**演習 4.1**

(1) **付表.1** から，$P(Z \leqq 1.96) = 0.975$，$P(Z \leqq z) = 0.9901$ となる $z = 2.33$ であることがわかる．また，**付表.2** より $z(0.05) = 1.645$, $z(0.025) = 1.960$, $z(0.005) = 2.576$ である．さらに，$P(|Z| \leqq z) = 0.99$ となる $z$ に対して，$Z$ の確率密度関数が 0 で対称だから，$P(Z > z) = 0.005$ が成り立つ．つまり，$z = z(0.005) = 2.576$. $P(Z > w) = 0.95$ は，$P(Z > -w) = 0.05$ であり，$-w = z(0.05)$. よって，$w = -z(0.05) = -1.645$. $P(|Z| > x) = 0.05$ は，$P(Z > x) = 0.025$ であり，$x = z(0.025) = 1.96$.

(2) $Z \sim N(0,1)$ だから，公式 26(p.30) より，$X = 3Z + 2 \sim N(3 \times 0 + 2, 3^2 \times 1) = N(2,9)$. つまり，$X$ は平均 2, 分散 9 の正規分布に従う．したがって，$E[X] = 2$, $V[X] = 9$, $E[X^2] = V[X] + \{E[X]\}^2 = 9 + 2^2 = 13$.

**演習 4.2** 当該の工業製品の組み立て時間を $X$ とすると，$X \sim N(20,9)$ なので，$Z = (X-20)/\sqrt{9} = (X-20)/3 \sim N(0,1)$ である．したがって，

$$\begin{aligned} &P(15.5 \leqq X \leqq 24.5) = P(-1.5 \leqq Z \leqq 1.5) \\ =&P(Z \leqq 1.5) - (1 - P(Z \leqq 1.5)) = 0.9332 - (1 - 0.9332) = 0.8664. \end{aligned}$$

**演習 4.3** 無作為に選んだ受験生の英語の得点を $X$ をすると，$X \sim N(\mu, 30^2)$ であり，150 点の人が上位 10% に入るということは，150 点以上の人の割合が 10% 以下であることを意味している．つまり，$P(X \geqq 150) \leqq 0.1$ が成り立つ．公式 26(p.30) より，$Z = (X-\mu)/30 \sim N(0,1)$ だから，

$$P\left(\frac{X-\mu}{30} \geqq \frac{150-\mu}{30}\right) = P\left(Z \geqq \frac{150-\mu}{30}\right) \leqq 0.1.$$

$z(0.1) \leqq \frac{150-\mu}{30}$ の時，$P(Z \geqq \frac{150-\mu}{30}) \leqq P(Z \geqq z(0.1)) = 0.1$ だから，$\mu \leqq 150 - 30 \times z(0.1)$. **付表.2** から $z(0.1) = 1.282$ だから，$\mu \leqq 150 - 30 \times 1.282 = 111.54$. つまり，$\mu$ は 111.54 点以下である．

**演習 4.4** $M_Y(t) = \exp\left(-2t + \frac{16}{2}t^2\right)$ であり，公式 24(p.30) より $N(\mu, \sigma^2)$ の積率母関数が $\exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2}{2}t^2\right)$ だから，$Y \sim N(-2, 16)$. したがって，公式 26(p.30) より，$Z = (Y - (-2))/4 = (Y+2)/4 \sim N(0,1)$. よって，

$$\begin{aligned} P(-1 \leqq Y \leqq 2) =& P\left(\frac{-1+2}{4} \leqq Z \leqq \frac{2+2}{4}\right) \\ =& P(Z \leqq 1) - P(Z \leqq 0.25) = 0.8413 - 0.5987 = 0.2426. \end{aligned}$$

**演習 4.5** $E[X]=\sum_{k=0}^{n}kp_k$ であるが，$k=0$ の時，$0\times p_0=0$ となるので，$E[X]=\sum_{k=1}^{n}kp_k$．ここで，$j=k-1$ とおくと，$k=j+1$ であり，$k=1,\dots,n$ のとき，$j=0,\dots,n-1$ なので，$E[X]=\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)p_{j+1}$ である．さて，$n!=n\times(n-1)\times\cdots\times 1=n\times(n-1)!$ であり，同様に $(j+1)!=(j+1)\times j!$ なので，

$$\begin{aligned}(j+1)\times p_{j+1}=&(j+1)\times\frac{n\times(n-1)!}{(n-(j+1))!\times(j+1)\times j!}p^{j+1}(1-p)^{n-(j+1)}\\=&np\frac{(n-1)!}{(n-1-j)!\times j!}p^j(1-p)^{n-1-j}\end{aligned}$$

である．しがたって，$E[X]=np\sum_{j=0}^{n-1}{}_{n-1}C_jp^j(1-p)^{n-1-j}$ であり，予備知識 0.1(6) の 2 項定理から，$\sum_{j=0}^{n-1}{}_{n-1}C_jp^j(1-p)^{n-1-j}=1=(p+1-p)^{n-1}=1$ なので，結局，$E[X]=np$ となる．

同様に，$E[X(X-1)]=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)p_k$ であるが，$k=0$ の時は $0\times(0-1)\times p_0=0$，$k=1$ の時は $1\times(1-1)\times p_1=0$ なので，$E[X(X-1)]=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)p_k$ となる．$j=k-2$ とおくと，$k=j+2$ であり，$k=2,\dots,n$ のとき，$j=0,\dots,n-2$ となるので，$E[X(X-1)]=\sum_{j=0}^{n-2}(j+2)(j+1)p_{j+2}$ となる．ここで，

$$\begin{aligned}(j+2)(j+1)p_{j+2}=&\frac{n(n-1)\times(n-2)!}{(n-(j+2))!j!}p^{j+2}(1-p)^{n-(j+2)}\\=&n(n-1)p^2\times{}_{n-2}C_j\end{aligned}$$

なので，$E[X(X-1)]=n(n-1)p^2\sum_{j=0}^{n-2}{}_{n-2}C_jp^j(1-p)^{n-2-j}$．予備知識 0.1(6) の 2 項定理から，$\sum_{j=0}^{n-2}{}_{n-2}C_jp^j(1-p)^{n-2-j}=(p+1-p)^{n-2}=1$ なので，結局，$E[X(X-1)]=n(n-1)p^2$ となる．

演習 **3.5**(p.23) で証明したように，$V[X]=E[X(X-1)]+E[X]-\{E[X]\}^2$ だから，$V[X]=n(n-1)p^2+np-(np)^2=np((n-1)p+1-np)=np(1-p)$ である．

**演習 4.6** 2 項分布の場合と同様，$E[X]=\sum_{k=1}^{\infty}kp_k=\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)p_{j+1}$ となり，

$$(j+1)p_{j+1}=(j+1)\frac{\lambda^{j+1}}{(j+1)!}e^{-\lambda}=\lambda\times\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$$

なので，$E[X]=\lambda e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}$．ここで，予備知識 0.2(10) の指数関数のテイラー展開より，$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}=e^{\lambda}$ である．したがって，$E[X]=\lambda e^{-\lambda}\times e^{\lambda}=\lambda$ である．

また，$E[X(X-1)]=\sum_{j=0}^{\infty}(j+2)(j+1)p_{j+2}$ であり，

$$(j+2)(j+1)p_{j+2}=(j+2)(j+1)\frac{\lambda^{j+2}}{(j+2)!}e^{-\lambda}=\lambda^2\times\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$$

なので，$E[X\,(X-1)] = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!} = \lambda^2 e^{-\lambda}\times e^{\lambda} = \lambda^2$ である．

演習 **3.5**(p.23) で証明したように，$V[X] = E[X(X-1)] + E[X] - \{E[X]\}^2$ だから，$V[X] = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$ である．

**演習 4.7**

$$E[X] = \int_0^{\infty} x\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\int_0^{\infty} x^{(\alpha+1)-1}e^{-\frac{x}{\beta}}dx$$

公式 21(p.28) より，$\int_0^{\infty} x^{(\alpha+1)-1}e^{-\frac{x}{\beta}}dx = \beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)$ なので，

$$=\frac{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\beta.$$

さらに，演習 **4.9**(p.32) (1) より $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ なので，$E[X] = \alpha\beta$ である．同様に，

$$\begin{aligned}E[X^2] &= \int_0^{\infty} x^2\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\int_0^{\infty} x^{(\alpha+2)-1}e^{-\frac{x}{\beta}}dx\\ &=\frac{\beta^{\alpha+2}\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)}\beta^2.\end{aligned}$$

演習 **4.9**(p.32) (1) を繰り返し使うと，$\Gamma(\alpha+2) = (\alpha+1)\Gamma(\alpha+1) = \alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)$ なので，$E[X^2] = \alpha(\alpha+1)\beta^2$ である．

**演習 4.8**

(1) $z = \frac{x-m}{s}$ と置くと，$s > 0$ だから，$x : -\infty \to \infty$ のとき，$z : -\infty \to \infty$ であり，$dx = s dz$ だから，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}}e^{-\frac{z^2}{2}}s\,dz = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz.$$

(2) $z = r\cos\theta,\, w = r\sin\theta$ のヤコビアン $J = \frac{\partial(z,w)}{\partial(r,\theta)}$ は

$$J = \frac{\partial(z,w)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta}\\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial \theta}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix} = r\cos^2\theta - (-r)\sin^2\theta = r$$

であり，$r > 0$ の時，$|J| = r$．また，$-\infty < z < \infty$, $-\infty < w < \infty$ の時，$0 < r < \infty,\, 0 \leqq \theta < 2\pi$ なので，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2+w^2}{2}}dzdw &= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}e^{-\frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{2}}|J|drd\theta\\ &= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}re^{-\frac{r^2}{2}}drd\theta.\end{aligned}$$

(3) $\dfrac{d}{dr}e^{-\frac{r^2}{2}} = e^{-\frac{r^2}{2}}\dfrac{d}{dr}\left(-\dfrac{r^2}{2}\right) = -re^{-\frac{r^2}{2}}$. したがって,

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} re^{-\frac{r^2}{2}} drd\theta = \int_0^\infty re^{-\frac{r^2}{2}}\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)dr = \int_0^\infty 2\pi re^{-\frac{r^2}{2}}dr$$
$$= -2\pi\left[e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^\infty = -2\pi(0-1) = 2\pi.$$

(4) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}dx$ とおくと，被積分関数が正だから，$I > 0$. また，(1), (2), (3) より，

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right)^2 = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{w^2}{2}}dw$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{z^2+w^2}{2}}dzdw = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} re^{-\frac{r^2}{2}}drd\theta = \frac{1}{2\pi}\times 2\pi = 1.$$

$I > 0$ だから，$I = 1$.

## 演習 4.9

(1) $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^\infty u^{1-1}e^{-u}du = \left[-e^{-u}\right]_0^\infty = -0-(-1) = 1$. また，予備知識 0.2(11) より $\displaystyle\lim_{u\to\infty} u^\alpha e^{-u} = 0$ だから，部分積分の公式より

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty u^{\alpha+1-1}e^{-u}du = \left[u^\alpha(-e^{-u})\right]_0^\infty - \int_0^\infty \alpha u^{\alpha-1}(-e^{-u})du$$
$$= \alpha\int_0 \infty u^{\alpha-1}e^{-u}du = \alpha\Gamma(\alpha).$$

(2) 公式 23(p.29) において，$s=1, m=0$ とすると，$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 1$ であるが，被積分関数が偶関数なので，$2\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 1$. よって，$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

(3)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}du = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-u}\frac{u^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}du.$$

ここで，$u = \frac{x^2}{2}$ とおくと，$x = \sqrt{2u}$ であり，$dx = \frac{1}{\sqrt{2}}u^{-\frac{1}{2}}du$ なので，

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2}\times\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\pi}.$$

## 演習 4.10

(1) $\Gamma(a)=\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$ なので,

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b)&=\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt\Gamma(b)=\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}\Gamma(b)dt\\&=\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}\left\{\int_0^\infty u^{b-1}e^{-u}du\right\}dt\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty t^{a-1}u^{b-1}e^{-(t+u)}dtdu.\end{aligned}$$

ここで, $t=vw$, $u=v(1-w)$ と置くと, $v=t+u$, $w=t/(t+u)$ なので, $0<t<\infty$, $0<u<\infty$ の時, $0<v<\infty$, $0<w<1$ であり,

$$J(v,w)=\begin{vmatrix}\frac{\partial t}{\partial v} & \frac{\partial t}{\partial w}\\ \frac{\partial u}{\partial v} & \frac{\partial u}{\partial w}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}w & v\\ 1-w & -v\end{vmatrix}=-vw-v(1-w)=-v.$$

したがって,

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b)&=\int_0^\infty\int_0^1(vw)^{a-1}(v(1-w))^{b-1}e^{-v}|-v|dvdw\\&=\int_0^\infty v^{a+b-1}e^{-v}dv\int_0^1 w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw=\Gamma(a+b)B(a,b).\end{aligned}$$

(2) $Be(a,b)$ の p.d.f. は $f(x)=\frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ なので,

$$\begin{aligned}E[X]&=\int_0^1 x\times\frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\frac{1}{B(a,b)}\int_0^1 x^{a+1-1}(1-x)^{b-1}dx\\&=\frac{B(a+1,b)}{B(a,b)}\end{aligned}$$

$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ と $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$ を使うと

$$=\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}=\frac{a\Gamma(a)\Gamma(b)}{(a+b)\Gamma(a+b)}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}=\frac{a}{a+b}.$$

同様に,

$$
\begin{aligned}
E[X^2] &= \int_0^1 x^2 \times \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 x^{a+2-1}(1-x)^{b-1}dx \\
&= \frac{B(a+2,b)}{B(a,b)} = \frac{\Gamma(a+2)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+2)} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \\
&= \frac{(a+1)\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{(a+b+1)\Gamma(a+b+1)} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \\
&= \frac{(a+1)a\Gamma(a)\Gamma(b)}{(a+b+1)(a+b)\Gamma(a+b)} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}.
\end{aligned}
$$

公式 11(p.18) より,

$$
\begin{aligned}
V[X] &= \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} - \frac{a^2}{(a+b)^2} = \frac{a(a+1)(a+b) - a^2(a+b+1)}{(a+b)^2(a+b+1)} \\
&= \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.
\end{aligned}
$$

### 演習 5.1

(1) $p_X(1) = r + \frac{1}{12}, \quad p_X(2) = \frac{1}{3} - r + \frac{r}{2} = \frac{1}{3} - \frac{r}{2},$

$p_X(3) = \frac{1}{3} + \frac{1-2r}{4} = \frac{7}{12} - \frac{r}{2}.$

$p_Y(1) = r + \frac{1}{3} - r + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \quad p_Y(2) = \frac{1}{12} + \frac{r}{2} + \frac{1-2r}{4} = \frac{1}{3}.$

(2) $p_{X|Y}(1|1) = \frac{p(1,1)}{p_Y(1)} = \frac{r}{\frac{2}{3}} = \frac{3r}{2}, \quad p_{X|Y}(2|1) = \frac{p(2,1)}{p_Y(1)} = \frac{\frac{1}{3}-r}{\frac{2}{3}} = \frac{1-3r}{2},$

$p_{X|Y}(3|1) = \frac{p(3,1)}{p_Y(1)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$

(3) $X$ と $Y$ が独立であることと，任意の $k = 1,2,3,\ j = 1,2$ に対して, $p(k,j) = p_X(k)p_Y(j)$ が成り立つことが同値なので，$X$ と $Y$ が独立であるためには，$p(1,1) = p_X(1)p_Y(1)$ が必要. したがって，$r = (r + \frac{1}{12}) \times \frac{2}{3}$. つまり，$r = \frac{1}{6}$. 逆に $r = \frac{1}{6}$ の時, 任意の $k,\ j$ に対して $p(k,j) = p_X(k)p_Y(j)$ が成り立つことが確かめられる. したがって，$X$ と $Y$ が独立であるとき，$r = \frac{1}{6}$.

### 演習 5.2

(1) $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy = 1$ より，

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{3}(x + ay + 2xy + b)dxdy = \frac{1}{3}\int_0^1 \left[xy + \frac{a}{2}y^2 + xy^2 + by\right]_0^1 dx$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(2x + \frac{a}{2} + b\right) dx = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2} + b + 1\right) = 1.$$

つまり，$a + 2b = 4$.

(2)

$$P(0 < X < \frac{1}{2},\ \frac{1}{3} < Y < \frac{2}{3}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3}(x + ay + 2xy + b)dxdy$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} \left[xy + \frac{a}{2}y^2 + xy^2 + by\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}a + \frac{1}{3}b\right) dx$$
$$= \frac{1}{36}(a + 2b + 1) = \frac{5}{36}.$$

(3)

$$
\begin{aligned}
f_X(x) =& \int_0^1 \frac{1}{3}(x+ay+2xy+b)dy = \frac{1}{3}\left[xy+\frac{a}{2}y^2+xy^2+by\right]_0^1 \\
=& \frac{1}{6}(4x+a+2b) = \frac{2}{3}(x+1). \\
f_Y(y) =& \int_0^1 \frac{1}{3}(x+ay+2xy+b)dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}+ayx+yx^2+bx\right]_0^1 \\
=& \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+ay+y+b\right) = \frac{1}{6}(2(a+1)y+2b+1).
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
f_X(x)f_Y(y) =& \frac{1}{9}(x+1)(2(a+1)y+2b+1) \\
=& \frac{1}{9}((2b+1)x+2(a+1)y+2(a+1)xy+2b+1).
\end{aligned}
$$

$0<x<1$, $0<y<1$ の任意の $x$, $y$ に対して，$f_{X|Y}(x|y)=f_X(x)$ がが成り立ち，$f_{X|Y}(x|y)=f(x,y)/f_Y(y)$ なので，$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ が成り立つ．したがって，

$$
\frac{1}{3}(x+ay+2xy+b) = \frac{1}{9}((2b+1)x+2(a+1)y+2(a+1)xy+2b+1).
$$

係数を比較すると，

$$
2b+1=3,\quad 2(a+1)=3a,\quad 2(a+1)=6,\quad 2b+1=3b.
$$

これらを満たす $a$, $b$ は $a=2$, $b=1$ であり，またこれは，$a+2b=4$ も満たす．以上より，$a=2$, $b=1$.

**演習 5.3** $p_X(1)=r+\frac{1}{12}$, $p_X(2)=\frac{1}{3}-\frac{r}{2}$, $p_X(3)=\frac{7}{12}-\frac{r}{2}$, $p_Y(1)=\frac{2}{3}$, $p_Y(2)=\frac{1}{3}$ だったので，$E[X]=1\times(r+\frac{1}{12})+2\times(\frac{1}{3}-\frac{r}{2})+3\times(\frac{7}{12}-\frac{r}{2})=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}r$, $E[Y]=1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$. また，

$$
\begin{aligned}
E[XY] =& 1\times1\times r+1\times2\times(\frac{1}{3}-r)+1\times3\times\frac{1}{3} \\
&+2\times1\times\frac{1}{12}+2\times2\times\frac{r}{2}+2\times3\times\frac{1-2r}{4} = \frac{10}{3}-2r.
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
Cov[X,Y] = E[XY]-E[X]E[Y] = \frac{10}{3}-2r-\frac{5-3r}{2}\times\frac{4}{3}=0.
$$

演習 **5.1**(p.43) (3) において，$X \perp\!\!\!\perp Y$ の時 $r = \frac{1}{6}$ であることを見た．したがって，$r \neq \frac{1}{6}$ の時，$X$ と $Y$ は独立ではない．しかしながら，上の結果より，そのような場合，つまり，$X$ と $Y$ が独立ではなくても，$Cov[X, Y] = 0$ となることが分かった．一般に，$X$ と $Y$ が独立なら，$Cov[X, Y] = 0$ となるが，その逆は成り立つとは限らないことを上の結果が例示している．

$p_{X|Y}(1|1) = \frac{3r}{2}$, $p_{X|Y}(2|1) = \frac{1-3r}{2}$, $p_{X|Y}(3|1) = \frac{1}{2}$ であったので，

$$E[X|Y = 1] = 1 \times \frac{3r}{2} + 2 \times \frac{1-3r}{2} + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{-3r+5}{2}.$$

**演習 5.4**　$f_X(x) = \dfrac{2}{3}(x+1)$, $f_Y(y) = \dfrac{1}{6}(2(a+1)y + 2b + 1)$ だったので，

$$E[X] = \int_0^1 x \times \frac{2}{3}(x+1)dx = \frac{5}{9},$$
$$E[Y] = \int_0^1 y \times \frac{1}{6}(2(a+1)y + 2b + 1)dy = \frac{4a+6b+7}{36}.$$

また，$f(x, y) = \dfrac{1}{3}(x + ay + 2xy + b)$ だったので，

$$\begin{aligned} E[XY] =& \int_0^1 \int_0^1 xy \times \frac{1}{3}(x + ay + 2xy + b)dxdy \\ =& \frac{1}{3}\int_0^1 x\left[\frac{1}{2}(x+b)y^2 + \frac{1}{3}(2x+a)y^3\right]_0^1 dx \\ =& \frac{1}{18}\int_0^1 (7x^2 + (2a+3b)x)dx = \frac{1}{108}(6a + 9b + 14). \end{aligned}$$

$Cov[X, Y] = 0$ の時，$E[XY] = E[X]E[Y]$ なので，

$$\frac{1}{108}(6a + 9b + 14) = \frac{5}{9} \times \frac{4a+6b+7}{36}.$$

これは $2a + 3b = 7$ と簡略化され，$a + 2b = 4$ と連立すると，$a = 2, b = 1$ が導かれる．また，この時，$f_Y(y) = \frac{1}{2}(2y+1)$ であり，$f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{3}(x+1)(2y+1)$．一方，$f(x, y) = \frac{1}{3}(x + 2y + 2xy + 1) = \frac{1}{3}(x+1)(2y+1)$ なので，$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ が成り立ち，$X \perp\!\!\!\perp Y$ となる．

**演習 5.5**　〔公式 32(p.40) の証明〕　$\mu_h = E[h]$, $\mu_g = E[g]$ とすると，$\mu_h - a$，$\mu_g - b$ は定数なので公式 29(p.39) より，

$$\begin{aligned} E[(h-a)(g-b)] =& E[(h - \mu_h + \mu_h - a)(g - \mu_g + \mu_g - b)] \\ =& E[(h-\mu_h)(g-\mu_g)] + (\mu_h - a)E[g - \mu_g] \\ &+ (\mu_g - b)E[h - \mu_h] + (a - \mu_h)(b - \mu_g) \end{aligned}$$

公式 10(p.18) から $E[h-\mu_h]=0$, $E[g-\mu_g]=0$ なので,

$$=Cov[h,g]+(a-E[h])(b-E[g]).$$

特に，$a=b=0$ とすると，$E[hg]=Cov[h,g]-E[h]E[g]$ なので，$Cov[h,g]=E[hg]-E[h]E[g]$.

〔公式 33(p.40) の証明〕公式 28(p.39) , 公式 30(p.40) より，$Cov[X,d]=Cov[b,cY+d]=0$. したがって，公式 31(p.40) から，$Cov[aX+b,cY+d]=a\,Cov[X,cY+d]+Cov[b,cY+d]=ac\,Cov[X,Y]+a\,Cov[X,d]=ac\,Cov[X,Y]$. また，公式 12(p.19) より，$V[aX+b]=a^2V[X]$, $V[cY+d]=c^2V[Y]$ なので，$r[aX+b,cY+d]=\frac{ac\,Cov[X,Y]}{\sqrt{a^2c^2V[X]V[Y]}}=\frac{ac}{|ac|}r[X,Y]$. したがって，$ac>0$ のとき，$r[aX+b,cY+d]=r[X,Y]$, $ac<0$ のとき，$r[aX+b,cY+d]=-r[X,Y]$.

〔公式 34(p.40) 〕公式 31(p.40) より，$V[aX+bY]=Cov[aX+bY,aX+bY]=a\,Cov[X,aX+bY]+b\,Cov[Y,aX+bY]=a^2\,Cov[X,X]+ab\,Cov[X,Y]+ba\,Cov[Y,X]+b^2\,Cov[Y,Y]$. 公式 30(p.40) より，$Cov[X,Y]=Cov[Y,X]$ より，$V[aX+bY]=a^2V[X]+2ab\,Cov[X,Y]+b^2V[Y]$.

**演習 5.6** $(X,Y)\sim f(x,y)$ とすると，$X\perp\!\!\!\perp Y$ のとき，$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ だから,

$$\begin{aligned}E[g_1(X)g_2(Y)]&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g_1(x)g_2(y)f_X(x)f_Y(y)dxdy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}g_1(x)f_X(x)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}g_2(y)f_Y(y)dy\right\}dx\end{aligned}$$

中括弧 $\{,\}$ の中の $y$ に関する積分は $E[g_2(Y)]$ であり，$x$ と無関係なので,

$$=E[g_2(Y)]\int_{-\infty}^{\infty}g_1(x)f_X(x)dx=E[g_1(X)]E[g_2(Y)].$$

特に，$g_1(x)=x$, $g_2(y)=y$ の時は，$E[XY]=E[X]E[Y]$. さらに，公式 32(p.40) より，$Cov[X,Y]=E[XY]-E[X]E[Y]=0$ であり，これと公式 34(p.40) から，$V[aX+bY]=a^2V[X]+b^2V[Y]$.

**演習 5.7** 公式 37(p.43) より，$E[Y_1]=\frac{1}{4}E[X_1]+\frac{2}{4}E[X_2]+\frac{1}{4}E[X_3]=\frac{1}{4}\mu+\frac{2}{4}\mu+\frac{1}{4}\mu=\mu$. $E[Y_2]=\frac{1}{6}E[X_1]+\frac{2}{6}E[X_2]+\frac{3}{6}E[X_3]=\frac{1}{6}\mu+\frac{2}{6}\mu+\frac{3}{6}\mu=\mu$. $X_1$, $X_2$, $X_3$ は独立だから，$Cov[X_2,X_3]=Cov[X_3,X_1]=Cov[X_1,X_2]=0$ が成り立つ．したがって，公式 38(p.43) より，$V[Y_1]=\left(\frac{1}{4}\right)^2V[X_1]+\left(\frac{2}{4}\right)^2V[X_2]+\left(\frac{1}{4}\right)^2V[X_3]=\frac{1}{16}\sigma^2+\frac{1}{4}\sigma^2+\frac{1}{16}\sigma^2=\frac{3}{8}\sigma^2$. 同様に，$V[Y_2]=\left(\frac{1}{6}\right)^2V[X_1]+\left(\frac{2}{6}\right)^2V[X_2]+\left(\frac{3}{6}\right)^2V[X_3]=\frac{1}{36}\sigma^2+\frac{1}{9}\sigma^2+\frac{1}{4}\sigma^2=\frac{7}{18}\sigma^2$. したがって，$V[Y_1]$ の方が小さい.

**演習 5.8**

(1) $f_X(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy = \frac{1}{2}\left(\left[(x+y)(-e^{-x-y})\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-x-y})dy\right)$
$= \frac{1}{2}\left(xe^{-x} + \left[-e^{-x-y}\right]_0^\infty\right) = \frac{1}{2}(x+1)e^{-x}$. したがって，$f_{Y|X}(y|x) = \frac{(x+y)e^{-y}}{x+1}$.

(2) $I_k = \int_0^\infty x^k e^{-x}dx$ とおくと，

$$I_{k+1} = \int_0^\infty x^{k+1}e^{-x}dx = \Big[x^{k+1}(-e^{-x})\Big]_0^\infty + (k+1)\int_0^\infty x^k e^{-x}dx = (k+1)I_k$$

であり，$I_0 = \int_0^\infty e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1$ だから，$I_k = k \times \cdots \times 1 \times I_0 = k!$ である． したがって，$E[X] = \int_0^\infty x\frac{1}{2}(x+1)e^{-x}dx = \frac{1}{2}(I_2+I_1) = \frac{3}{2}$. また，
$E[XY] = \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty\int_0^\infty x^2ye^{-x^y}dxdy + \int_0^\infty\int_0^\infty xy^2e^{-x-y}dxdy\right)$
$= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty x^2e^{-x}dx\int_0^\infty ye^{-y}dy + \int_0^\infty xe^{-x}dx\int_0^\infty y^2e^{-y}dy\right) = I_2I_1 = 2$. したがって，$Cov[X,Y] = 2 - \frac{3}{2}\times\frac{3}{2} = -\frac{1}{4}$.

## 演習 5.9

(1) $f(t) = E[(X-a)^2]t^2 - 2E[(X-a)(Y-b)]t + E[(Y-b)^2]$ だから，$t = \frac{E[(X-a)(Y-b)]}{E[(X-a)^2]}$ の時，$f(t)$ は最小値 $E[(Y-b)^2] - \frac{\{E[(X-a)(Y-b)]\}^2}{E[(X-a)^2]}$ をとる．したがって，$t_0 = \frac{E[(X-a)(Y-b)]}{E[(X-a)^2]}$.

(2) $f(t)$ は $(t(X-a)-(Y-b))^2 \geqq 0$ の期待値なので，任意の $t$ に対して，$f(t) \geqq 0$ である．したがって，$f(t_0) \geqq 0$. 上の結果から，$\{E[(X-a)(Y-b)]\}^2 \leqq E[(X-a)^2]E[(Y-b)^2]$.

(3) $a = \mu_X(=E[X]), b = \mu_Y(=E[Y])$ ととると，$\{Cov[X,Y]\}^2 \leqq V[X]V[Y]$ である．したがって，$\left\{\frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{V[X]V[Y]}}\right\}^2 \leqq 1$. つまり，$-1 \leqq r[X,Y] \leqq 1$ である．

**演習 6.1**　例 **3.8**(p.17)，例 **3.11**(p.19)，例 **6.4**(p.48) で考えたように，$E[X_i] = \frac{7}{2}$, $V[X_i] = \frac{35}{12}$ だから，

(1) $E[\bar{X}] = \frac{7}{2}$, $V[\bar{X}] = \frac{1}{105} \times \frac{35}{12} = \frac{1}{36}$, $E[S^2] = \frac{105-1}{105} \times \frac{35}{12} = \frac{26}{9}$ である．

(2) また，$Z = \sqrt{105}\frac{\bar{X}-\frac{7}{2}}{\sqrt{\frac{35}{12}}} = 6\bar{X} - 21$ が近似的に $N(0,1)$ に従うので，$P(3.4 \leqq \bar{X} \leqq 3.6) = P(3.4 \times 6 - 21 \leqq Z \leqq 3.6 \times 6 - 21) = P(-0.6 \leqq Z \leqq 0.6) = 0.7257 - (1 - 0.7257) = 0.4514$.

**演習 6.2**

(1) 例 **6.3**(p.47)　で考えた不良品率の問題と同様に，$E[\bar{X}] = p = \frac{1}{5}$, $V[\bar{X}] = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{4}{400\times 5^2} = \frac{1}{2500}$. また，例 **6.6**(p.48) のように，$Z = \frac{\bar{X}-\frac{1}{5}}{\sqrt{\frac{1}{2500}}} = 50\bar{X} - 10$ が近似的に $N(0,1)$ に従う．したがって，$P(\bar{X} > A) = P(50\bar{X}-10 > 50A-10) = 0.05$. よって，$50A - 10 = z(0.05) = 1.645$ であり，$A = 11.645/50 = 0.2329$.

(2) $p = 1/4$ の時，$E[\bar{X}] = p = \frac{1}{4}$, $V[\bar{X}] = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{3}{6400}$ なので，$Z = \frac{\bar{X}-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{3}{6400}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(80\bar{X} - 20)$ が近似的に $N(0,1)$ に従う．したがって，$A = 0.2329$ に対して，$P(\bar{X} \geqq A) = P(\frac{1}{\sqrt{3}}(80\bar{X} - 20) \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}(80 \times 0.2329 - 20) = P(Z \geqq -0.804706) = P(Z \leqq 0.804706) = 0.7881 + (0.7910 - 0.7881) \times 0.4706 = 0.789465$.

**演習 6.3**

(1) $V[\bar{X}] = \frac{1}{n}\sigma^2 = \frac{1}{25} \times 30^2 = 36$. $E[S^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \frac{24}{25} \times 30^2 = 864$. $\frac{n}{\sigma^2}S \sim \chi^2_{n-1}$ なので，公式 43(p.49) より $V[\frac{n}{\sigma^2}S] = 2(n-1)$. よって，$V[S] = V[\frac{\sigma^2}{n}\frac{n}{\sigma^2}S] = \left(\frac{\sigma^2}{n}\right)^2 V[\frac{n}{\sigma^2}S] = \frac{\sigma^4}{n^2} \times 2(n-1) = \frac{30^4}{25^2} \times 2 \times 24 = 62208$.

(2) $P(\bar{X} \geqq 122) = P\left(\sqrt{25}\frac{\bar{X}-110}{30} \geqq \sqrt{25}\frac{122-110}{30}\right) = P\left(\sqrt{25}\frac{\bar{X}-110}{30} \geqq 2\right) = 1 - 0.9772 = 0.0228$.

(3) $T \sim N(0,1)$ だから，$P(T < a) = 0.95$ のとき，$a = z(0.05) = 1.645$.

(4) $(n-1)U^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$ であり，$P(U^2 < b) = P\left(\frac{(n-1)U^2}{\sigma^2} < \frac{(n-1)b}{\sigma^2}\right) = 0.99$ だから，$\frac{(n-1)b}{\sigma^2} = \chi^2_{n-1}(0.01)$. $n = 25$ なので，$\chi^2_{n-1}(0.01) = \chi^2_{24}(0.01) = 42.98$ であるから，$b = 42.98/24 \times \sigma^2 = 1.79083\sigma^2$.

(5) $Y = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/U \sim t_{n-1}$ であり，$\bar{X} - c\frac{U}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq \bar{X} + c\frac{U}{\sqrt{n}} \iff |Y| \leqq c$ なので，$P(|Y| \leqq c) = 0.95$. したがって，$c = t_{n-1}(0.025) = t_{24}(0.025) = 2.064$.

(6) $V = (n-1)U^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{24}$ であり，$P(d_1 \leqq V) = 0.975$, $P(V \leqq d_2) = 0.025$ なので，$d_1 = \chi^2_{24}(0.975) = 12.401$, $d_2 = \chi^2_{24}(0.975) = 12.401$ である.

## 演習 6.4

(1) $M_{Y_i}(0) = E[e^{0\times Y_i}] = E[1] = 1$, $M'_{Y_i}(0) = E[Y_i] = E[(X_i - \mu)/\sigma] = (E[X_i] - \mu)/\sigma = (\mu - \mu)/\sigma = 0$. さらに，$M''_{Y_i}(0) = E[Y_i^2] = E\left[(X_i - \mu)^2/\sigma^2\right] = E[(X_i - \mu)^2]/\sigma^2 = V[X_i]/\sigma^2 = \sigma^2/\sigma^2 = 1$.

(2) $M_{Y_i}(t) = M_{Y_i}(0) + M'_{Y_i}(0)t + \frac{1}{2}M''_{Y_i}(c)t^2 = 1 + \frac{1}{2}M''_{Y_i}(c)t^2$. ただし，$c$ は $0$ と $t$ の間の実数である.

(3) $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1} Y_i = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)/\sigma = \frac{1}{\sqrt{n}}(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu)/\sigma = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma = Z$. また，$M_Z(t) = E[e^{tZ}] = E[e^{\frac{t}{\sqrt{n}}(Y_1+\cdots+Y_n)}] = E[e^{\frac{t}{\sqrt{n}}Y_1} \times \cdots \times e^{\frac{t}{\sqrt{n}}Y_n}]$. $Y_1, \ldots, Y_n$ は独立なので，$M_Z(t) = E[e^{\frac{t}{\sqrt{n}}Y_1}] \times \cdots \times E[e^{\frac{t}{\sqrt{n}}Y_n}] = M_{Y_1}(\frac{t}{\sqrt{n}}) \times \cdots \times M_{Y_n}(\frac{t}{\sqrt{n}})$. さらに，$Y_1, \ldots, Y_n$ は同一分布に従うので，$M_{Y_1}(\frac{t}{\sqrt{n}}) = \cdots = M_{Y_n}(\frac{t}{\sqrt{n}})$. よって，$M_Z(t) = \left(M_{Y_1}(\frac{t}{\sqrt{n}})\right)^n$.

(4) 以上より，$M_Z(t) = \left(1 + \frac{1}{2}M''_{Y_1}(c)\frac{t^2}{n}\right)^n$ と表される．ただし，$c$ は $0$ と $t/\sqrt{n}$ の間の実数．したがって，$n \to \infty$ の時，$c \to 0$ であり，$M''_{Y_1}(c) \to M''_{Y_1}(0) = 1$ である．このことから，$M_Z(t) \to e^{\frac{t^2}{2}}$ がわかる.〔注意〕$n \to \infty$ の時，$(1+\frac{1}{n})^n \to e$ であり，$(1 + \frac{a}{n})^n \to e^a$. さらに，$a_n \to a$ の時，$(1 + \frac{a_n}{n})^n \to e^a$ である.

**演習 7.1**

(1) 母平均の信頼区間 $CI_{\mu,1}$ を用いればよい．$1-\alpha=0.95$ で $\alpha/2=0.025$，$z(\alpha/2)=z(0.025)=1.96$ であり，$n=24, \sigma^2=216$ なので，$[\bar{X}-1.96\times\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{24}}, \bar{X}+1.96\times\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{24}}]=[\bar{X}-5.88, \bar{X}+5.88]$ である．また，$\bar{X}=102$ の時，$[102-5.88, 102+5.88]=[96.12, 107.88]$ である．

(2) 母平均の信頼区間 $CI_{\mu,2}$ を用いればよい．$1-\alpha=0.95$, $\alpha=0.05$ なので，$t_{n-1}(\alpha/2)=t_{15}(0.025)=2.131$ (**付表.4** より) であり，$n=16$ なので，$[\bar{X}-2.131\times\frac{U}{\sqrt{16}}, \bar{X}+2.131\times\frac{U}{\sqrt{16}}]=[\bar{X}-0.53275\times U, \bar{X}+0.53275\times U]$ となる．$\bar{X}=102$, $U^2=169$ の時は，$[102-0.53275\times\sqrt{169}, 102+0.53275\times\sqrt{169}]=[95.0743, 108.926]$.

**演習 7.2**　母平均の信頼区間 $CI_{\mu,3}$ を用いればよい．$1-\alpha=0.99$, $\alpha/2=0.005$, $z(\alpha/2)=z(0.005)=2.576$. であり，$n=96$ なので，$[\bar{X}-2.576\times\frac{U}{\sqrt{96}}, \bar{X}+2.576\times\frac{U}{\sqrt{96}}]=[\bar{X}-\frac{0.644\times U}{\sqrt{6}}, \bar{X}+\frac{0.644\times U}{\sqrt{6}}]$. $\bar{X}=102$, $U^2=216$ の時は，$[102-\frac{0.644\times\sqrt{216}}{\sqrt{6}}, 102+\frac{0.644\times\sqrt{216}}{\sqrt{6}}]=[102-0.644\times 6, 102+0.644\times 6]=[98.136, 105.864]$.

**演習 7.3**　母比率の信頼区間 $CI_p$ を用いればよい．$1-\alpha=0.99, \alpha/2=0.005, z(\alpha/2)=z(0.005)=2.576$ であり，$n=121$ なので，$CI_p$　は $[\bar{X}-2.576\times\frac{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}}{\sqrt{121}}, \bar{X}+2.576\times\frac{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}}{\sqrt{121}}]=[\bar{X}-0.2342\times\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}, \bar{X}+0.2342\times\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}]$. $\bar{X}=4/13$ のとき，$\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}=\frac{6}{13}$ なので，$CI_p$ は $[\frac{4}{13}-0.2342\times\frac{6}{13}, \frac{4}{13}+0.2342\times\frac{6}{13}]=[0.1996, 0.4158]$.

**演習 7.4**　$0\leqq\bar{X}\leqq 1$ のとき，$\bar{X}(1-\bar{X})\leqq\frac{1}{4}$ である．したがって，$\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\leqq\sqrt{\frac{1}{4n}}=\frac{1}{2\sqrt{n}}$. これより，$0.95=P(\bar{X}-1.96\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\leqq\mu\leqq\bar{X}+1.96\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}})\leqq P(\bar{X}-1.96\times\frac{1}{2\sqrt{n}}\leqq\mu\leqq\bar{X}+1.96\times\frac{1}{2\sqrt{n}})\leqq P(\bar{X}-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqq\bar{X}+\frac{1}{\sqrt{n}})$. つまり，95% 以上である．

**演習 7.5**　$1-\alpha=0.95$ の時，$\alpha/2=0.025, 1-\alpha/2=0.975$ であり，さらに $n=15$ ならば $\chi^2_{n-1}(\alpha/2)=\chi^2_{14}(0.025)=26.119$, $\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)=\chi^2_{14}(0.975)=5.629$ である．したがって，母分散の信頼区間は $[\frac{(15-1)U^2}{26.119}, \frac{(15-1)U^2}{5.629}]=[0.536008\times U^2, 2.48712\times U^2]$ である．$U^2=100$ のときは，$[53.6008, 248.712]$.

**演習 7.6**　$T=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/U\sim t_{n-1}$ なので，ティー分布が原点対称であることを考慮すると，$P(-t_{n-1}(\alpha/2)\leqq\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)U\leqq t_{n-1}(\alpha/2))=1-\alpha$. $P()$ の中の不

等号は $\bar{X} - t_{n-1}(\alpha/2)\frac{U}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq \bar{X} + t_{n-1}(\alpha/2)\frac{U}{\sqrt{n}}$ なので，$[\bar{X} - t_{n-1}(\alpha/2)\frac{U}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1}(\alpha/2)\frac{U}{\sqrt{n}}]$ が信頼度 $1-\alpha$ の信頼区間である．

**演習 7.7** $(c_1\bar{X}, c_2\bar{X})$ という形の信頼区間を作る．$V = \frac{2n}{\mu}\bar{X}$ とすると，$V \sim \chi^2_{2n}$ である．そこで，

$$c_1\bar{X} < \mu < c_2\bar{X} \iff \frac{2n}{c_2} < \frac{2n}{\mu}\bar{X} < \frac{2n}{c_1} \iff \frac{2n}{c_2} < V < \frac{2n}{c_1}$$

と変形すると，

$$\begin{aligned} 1-\alpha =& P(c_1\bar{X} < \mu < c_2\bar{X}) = P\left(\frac{2n}{c_2} < V < \frac{2n}{c_1}\right) \\ =& 1 - P\left(V \leqq \frac{2n}{c_2}\right) - P\left(\frac{2n}{c_1} \leqq V\right) \end{aligned}$$

となる．したがって，$P\left(V \leqq \frac{2n}{c_2}\right) = P\left(\frac{2n}{c_1} \leqq V\right) = \frac{\alpha}{2}$ となるように $c_1, c_2$ を選べばよい．$V \sim \chi^2_{2n}$ なので，$\frac{2n}{c_2} = \chi^2_{2n}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, $\frac{2n}{c_1} = \chi^2_{2n}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$．したがって，$c_1 = \frac{2n}{\chi^2_{2n}(\alpha/2)}$, $c_2 = \frac{2n}{\chi^2_{2n}(1-\alpha/2)}$ とすればよいことがわかる．以上より，

$$\left[\frac{2n}{\chi^2_{2n}(\alpha/2)}\bar{X}, \frac{2n}{\chi^2_{2n}(1-\alpha/2)}\bar{X}\right]$$

が信頼度 $100(1-\alpha)\%$ の $\mu$ の信頼区間である．

**演習 8.1** $Z := 4(\bar{X}-\mu)/5 \sim N(0,1)$ であることに注意しよう．

(1) $\alpha = P(\bar{X} < 1 \mid \mu = 2) = P(Z < -0.8) = 1 - 0.7881 = 0.2119$．また，$\beta = P(\bar{X} \geqq 1 \mid \mu \neq 2) = P(Z \geqq 4(1-\mu)/5)$ であり，$\mu = 1$ の時，$\beta_1 = P(Z \geqq 0) = 0.5$. $\mu = 0$ の時，$\beta_2 = P(Z \geqq 0.8) = 0.2119$.

(2) $\alpha' = P(\bar{X} > 3 \mid \mu = 2) = P(Z > 0.8) = 1 - 0.7881 = 0.2119$．また，$\beta = P(\bar{X} \leqq 3 \mid \mu \neq 2) = P(Z \leqq 4(3-\mu)/5)$ であり，$\mu = 1$ の時，$\beta'_1 = P(Z \leqq 1.6) = 0.9452$. $\mu = 0$ の時，$\beta'_2 = P(Z \leqq 2.4) = 0.9918$ となる．したがって，$\beta_1 < \beta'_1, \beta_2 < \beta'_2$ であり，$R$ の方が優れている．

(3) $R = \{\bar{X} \mid \bar{X} < a\}$ とすると，$\alpha = P(\bar{X} < a \mid \mu = 2) = P(Z < 4(a-2)/5)$, $\beta = P(\bar{X} \geqq a \mid \mu = 1) = P(Z \geqq 4(a-1)/5)$．$\alpha = \beta$ より，$P(Z < 4(a-2)/5) = P(Z \geqq 4(a-1)/5)$．$b = 4(a-2)/5, c = 4(a-1)/5$ とすると，$b < c$ であり，$P(Z < b) = P(Z \geqq c)$．$Z \sim N(0,1)$ であり，標準正規分布が原点で左右対称であることから，$b = -c$ となることがわかる．したがって，$-4(a-2)/5 = 4(a-1)/5$. これより，$a = 1.5$．このとき，$\alpha = P(Z < -0.4) = 1 - 0.6554 = 0.3446$.

**演習 8.2** 対立仮説 $H_1 : \mu < \mu_0$ に対しては，棄却域は $R_{\mu<\mu_0} = \{\bar{X} \mid \bar{X} < \mu_0 - c\}$ という形を考える．$X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ であり，$Z_0 = \sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/\sigma$ とすると，

$$\bar{X} < \mu_0 - c \iff \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma} < -c\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \iff Z_0 < -c\frac{\sqrt{n}}{\sigma}$$

である．したがって，

$$\alpha_0 = \alpha = P\left(\bar{X} < \mu_0 - c \mid \mu = \mu_0\right) = P\left(Z_0 < -c\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \;\middle|\; \mu = \mu_0\right)$$

である．$H_0$ が真の時，$\mu = \mu_0$ であり，$Z_0 \sim N(0,1)$ なので，$c\frac{\sqrt{n}}{\sigma} = z(\alpha_0)$．つまり，$c = z(\alpha_0)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$．したがって，$R_{\mu<\mu_0,1}$ は有意水準 $\alpha_0$ の棄却域である．

また，対立仮説 $H_1 : \mu \neq \mu_0$ に対しては，棄却域は $R_{\mu\neq\mu_0} = \{\bar{X} \mid \bar{X} < \mu_0 - c, \mu_0 + c < \bar{X}\}$ という形を考えればよい．$\sigma$ が未知である場合は，$T_0 = \sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/U$ を用いる．

$$\begin{aligned}\bar{X} < \mu_0 - c, \mu_0 + c < \bar{X} &\iff \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu_0}{U} < -c\frac{\sqrt{n}}{U}, c\frac{\sqrt{n}}{U} < \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu_0}{U} \\ &\iff T_0 < -c\frac{\sqrt{n}}{U}, c\frac{\sqrt{n}}{U} < T_0 \iff |T_0| > c\frac{\sqrt{n}}{U}\end{aligned}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}\alpha_0 =& \alpha = P\left(\bar{X} < \mu_0 - c, \mu_0 + c < \bar{X} \mid \mu = \mu_0\right) \\ =& P\left(|T_0| > c\frac{\sqrt{n}}{U} \;\middle|\; \mu = \mu_0\right)\end{aligned}$$

である．$H_0$ が真の時，$\mu=\mu_0$ であり，$T_0 \sim t_{n-1}$ なので，$c\frac{\sqrt{n}}{U}=t_{n-1}(\alpha_0/2)$．つまり，$c=t_{n-1}(\alpha_0/2)\frac{U}{\sqrt{n}}$．したがって，$R_{\mu\neq\mu_0,2}$ は有意水準 $\alpha_0$ の棄却域である．

ここでは，棄却域の形を与え，その形に合うように $c$ の値を決める手順をとった．棄却域 $R_{\mu<\mu_0,1}$ や $R_{\mu\neq\mu_0,2}$ の具体形が分かっているので，その棄却域の第 1 種の過誤を犯す確率 $\alpha$ を計算すると有意水準 $\alpha_0$ に一致することを示してもよい．

## 演習 8.3

(1) $R_{\mu\neq\mu_0,1}$ を用いればよい．$\alpha_0=0.05$ なので，$z(\frac{\alpha_0}{2})=z(0.025)=1.96$ であり，$\sigma^2=9, n=16$ より，$z(\frac{\alpha_0}{2})\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1.96\times\frac{3}{4}=1.47$．したがって，$R_{\mu\neq\mu_0,1}=\{\bar{X}\mid\bar{X}<100-1.47, 100+1.47<\bar{X}\}=\{\bar{X}\mid\bar{X}<98.53, 101.47<\bar{X}\}$ である．$\bar{X}=98$ は $R_{\mu\neq\mu_0,1}$ に含まれるので，有意水準 5% で $H_0:\mu=100$ が棄却される．つまり，$\mu$ は 100 と有意に異なる．

(2) $R_{\mu\neq\mu_0,2}$ を用いればよい．$\alpha_0=0.05, n=16$ なので，**付表.4** より，$t_{n-1}(\frac{\alpha_0}{2})=t_{15}(0.025)=2.131$．したがって，$R_{\mu\neq\mu_0,2}=\{T_0\mid|T_0|>2.131\}$ である．ただし，$T_0=\sqrt{n}\frac{\bar{X}-100}{U}=4\times\frac{\bar{X}-100}{U}$ である．$\bar{X}=98, U^2=9$ のとき，$T_0=4\times\frac{98-100}{3}=-\frac{8}{3}=-2.666\cdots$．したがって，$T_0$ は $R_{\mu\neq\mu_0,2}$ に含まれるので，有意水準 5% で $\mu$ は 100 と異なると言える．また，$\alpha_0=0.01$ の時，$t_{n-1}(\frac{\alpha_0}{2})=t_{15}(0.005)=2.947$ なので，$R_{\mu\neq\mu_0,2}=\{T_0\mid|T_0|>2.947\}$ であり，$T_0$ は棄却域に含まれない．つまり，有意水準 1% では $\mu$ と 100 に有意な差はない．

(3) $R_{\sigma^2\neq\sigma_0^2}$ を用いればよい．$\alpha_0=0.05, n=16$ なので，**付表.3** より，$\chi^2_{n-1}(\frac{\alpha_0}{2})=\chi^2_{15}(0.025)=27.488$, $\chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha_0}{2})=\chi_{15}(0.975)=6.262$ である．したがって，$R_{\sigma^2\neq\sigma_0^2}=\{V_0\mid V_0<6.262, 27.488<V_0\}$．ただし，$V_0=\frac{n-1}{\sigma_0^2}U^2=\frac{15}{8}U^2$．$U^2=9$ の時，$V_0=\frac{15}{8}\times 9=16.875$ であり，$R_{\sigma^2\neq\sigma_0^2}$ に含まれない．したがって，有意水準 5% では $H_0:\sigma^2=8$ は棄却されない．

また，$\alpha_0=0.01$ の時は，**付表.3** より，$\chi^2_{n-1}(\frac{\alpha_0}{2})=\chi^2_{15}(0.005)=32.801$, $\chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha_0}{2})=\chi_{15}(0.995)=4.601$ である．したがって，$R_{\sigma^2\neq\sigma_0^2}=\{V_0\mid V_0<4.601, 32.801<V_0\}$．$V_0=\frac{15}{8}\times 9=16.875$ は $R_{\sigma^2\neq\sigma_0^2}$ に含まれないので，有意水準 1% でも $H_0:\sigma^2=8$ は棄却されない．

**演習 8.4**

$$\begin{aligned}\alpha =&P(U^2 \in R_{\sigma^2 \neq \sigma_0^2} \mid \sigma^2 = \sigma_0^2)\\ =&P\left(U^2 < \frac{\chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha_0}{2}\right)}{n-1}\sigma_0,\ \frac{\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)}{n-1}\sigma_0^2 < U^2 \;\middle|\; \sigma^2 = \sigma_0^2\right)\\ =&P\left(V_0 < \chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha_0}{2}\right), \chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) < V_0 \;\middle|\; \sigma^2 = \sigma_0^2\right)\end{aligned}$$

であり，$\sigma^2 = \sigma_0^2$ の時，$V_0 \sim \chi^2_{n-1}$ なので，

$$\alpha = P\left(V_0 < \chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha_0}{2}\right) \;\middle|\; \sigma^2 = \sigma_0^2\right) + P\left(\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) < V_0 \;\middle|\; \sigma^2 = \sigma_0^2\right) = \alpha_0$$

である．つまり，$R_{\sigma^2 \neq \sigma_0^2}$ は有意水準 $\alpha_0$ の棄却域である．

ここでは，$R_{\sigma^2 \neq \sigma_0^2}$ の与えられた表現を使って，それが有意水準 $\alpha_0$ であることを証明したが，棄却域の形を $\{U^2 \mid U^2 < c_1\sigma_0^2, c_2\sigma_0^2 < U^2\}$, $0 < c_1 < 1$, $1 < c_2$ として，有意水準が $\alpha_0$ になるように $c_1, c_2$ を決めてもよい．その計算過程は，$\sigma^2$ に対する信頼区間とほぼ同じである．

**演習 8.5**

(1) $H_0 : p = 0.55$, $H_1 : p > 0.55$. ただし，$p$ は新商品の改善率である．

(2) $R_{p>p_0}$ を用いればよい．$p_0 = 0.55 = \frac{11}{20}$, $n = 99$ なので，$Z_0 = \sqrt{n}\frac{\bar{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} = 3\sqrt{11}\frac{\bar{X}-\frac{11}{20}}{\frac{3\sqrt{11}}{20}} = 20\bar{X} - 11$. このとき，$R = \{Z_0 \mid Z_0 > z(\alpha)\}$.

(3) $\bar{X} = \frac{64}{99}$, $Z_0 = 20 \times \frac{64}{99} - 11 = 1.9293$. $\alpha_0 = 0.05$ なので，**付表.2** より，$z(\alpha_0) = z(0.05) = 1.645$. したがって，$Z_0$ は $z(\alpha_0)$ より大きく，$R$ に含まれるので，$H_0$ が棄却され，有意水準 5% で $p$ が 0.55 より大きいと言える．

(4) $\alpha_0 = 0.01$ のとき，$z(\alpha_0) = z(0.01) = 2.326$ なので，$Z_0$ は $z(\alpha_0)$ より小さく，$R$ に含まれないので，$H_0$ が棄却されず，$p$ が 0.55 より大きいとは言えない．

**演習 8.6** $A = 48$, $\bar{X} = \frac{48}{192} = \frac{1}{4} = 0.25$.

(1) 母比率の信頼区間 $CI_p$ において，$1-\alpha = 0.95$ とすると，$z(\frac{\alpha}{2}) = 1.96$, $z(\frac{\alpha}{2})\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{192}} = 1.96\times\frac{1}{4\times 8} = 0.06125$ なので，95% 信頼区間は $[0.25-0.06125, 0.25+0.06125] = [0.2, 0.3]$.

(2) 正三角形の面が出る確率 $p$ に関する 帰無仮説 $H_0 : p = \frac{1}{5}$, 対立仮説 $H_1 : p \neq \frac{1}{5}$ を仮説検定するには，$R_{p\neq p_0}$ を用いればよい．$\alpha_0 = 0.05$ なので，**付表.2** より $z(\alpha_0/2) = z(0.025) = 1.96$．したがって，$R_{p\neq 1/5} = \{Z_0 \mid |Z_0| > 1.96\}$ である．ただし，$Z_0 = \sqrt{192}\frac{\bar{X}-\frac{1}{5}}{\sqrt{\frac{1}{5}(1-\frac{1}{5})}} = 4\sqrt{3}(5\bar{X}-1)$．$\bar{X} = \frac{1}{4}$ なので，$Z_0 = \sqrt{3}$ であり，$Z_0$ は $R_{p\neq 1/5}$ には含まれない．よって，有意水準 5% では $H_0 : p = \frac{1}{5}$ は棄却されない．

## 演習 8.7

(1) 母平均の信頼区間 $CI_{\mu,2}$ において，$1-\alpha = 0.99, n = 20$ とすると，$\alpha/2 = 0.005$ なので，**付表.4** より，$t_{n-1}(\frac{\alpha}{2}) = t_{19}(0.005) = 2.861$．$\bar{X} = 7, U^2 = 8$ なので，母平均の信頼区間 $CI_{\mu,2}$ は $[7 - 2.861 \times \sqrt{\frac{8}{20}}, 7 + 2.861 \times \sqrt{\frac{8}{20}}] = [7 - 2.861 \times \frac{2}{\sqrt{10}}, 7 + 2.861 \times \frac{2}{\sqrt{10}}] = [5.2, 8.8]$.

(2) $H_0 : \mu = 5.5, H_1 : \mu \neq 5.5$ に対して，$R_{\mu\neq\mu_0,2}$ を用いればいい．有意水準 5% のとき，$t_{n-1}(\frac{\alpha}{2}) = t_{19}(0.025) = 2.093$ であり，$T_0 = \sqrt{20}\frac{7-5.5}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \times 1.5 = 2.37$ なので，$T_0$ は $R_{\mu\neq 5.5,2}$ に含まれる．つまり，有意水準 5% では $H_0 : \mu = 5.5$ は棄却される．また，有意水準 1% では，$t_{n-1}(\frac{\alpha}{2}) = t_{19}(0.005) = 2.861$ なので，$T_0$ は $R_{\mu\neq 5.5,2}$ に含まれず，つまり，有意水準 1% では $H_0$ は棄却されない．

(3) 母分散の信頼区間 $CI_{\sigma^2}$ において，$n = 20, 1-\alpha = 0.99$ とすると，$\alpha/2 = 0.005$, $1 - \alpha/2 = 0.995$ なので，$\chi^2_{n-1}(\alpha/2) = \chi^2_{19}(0.005) = 38.5823$, $\chi^2_{19}(0.995) = 6.84397$ である．$U^2 = 8$ だから，母分散 $\sigma^2$ の 99% 信頼区間は $\left[\frac{19\times 8}{38.5823}, \frac{19\times 8}{6.84397}\right] = [3.9, 22.2]$.

(4) $H_0 : \sigma^2 = 16$, $H_1 : \sigma^2 < 16$ に対して，$R_{\sigma^2<\sigma_0^2}$ を用いればよい．$V_0 = 19 \times 8/16 = 9.5$ であり，$\alpha_0 = 0.05$ の時，$\chi^2_{19}(1 - 0.05) = 10.117$ なので，$V_0$ は棄却域に含まれる．つまり，$\sigma^2$ は有意に 16 より小さい．また，$\alpha_0 = 0.10$ の時，$\chi^2_{19}(1 - 0.1) = 11.651$ なので，やはり，$V_0$ は棄却域に含まれ，$\sigma^2$ は有意に 16 より小さいことがわかる．