

有効繰返し数 n_e について

2003年4月4日

吉田 節

3月21日の宿題演習時、有効繰返し数 n_e を求める式は $1+$ がある場合とない場合があるが、会社へ帰って講義する時に何故そうなるか質問されたら、どう説明すればよいかわからないという質問があった。田口の式のことを考えて質問されていると思われるため、テキストにある有効繰返し数 n_e に関する田口の式について調べたところ、以下の通りであった。

◎テキスト 11-27 (分散分析)

母平均の区間推定

$$(\text{点推定値}) \pm t(\text{誤差自由度}, \alpha) \sqrt{\frac{\text{誤差分散}}{n_e}}$$

$$\text{〔田口の式〕 } \frac{1}{n_e} = \frac{1 + (\text{点推定に用いた要因の自由度の和})}{\text{総データ数 } (N)}$$

$$\text{〔伊奈の式〕 } \frac{1}{n_e} = (\text{点推定の式に用いられている係数の和})$$

直交配列表実験でも同じであるが、田口の式は擬水準法には使用することはできない。

◎テキスト 11-131 (乱塊法)

母平均の区間推定

$$(\text{点推定値}) \pm t(\phi, \alpha) \sqrt{\hat{V}(\text{点推定値})}$$

ここで、 $\hat{V}(\text{点推定値})$ は以下のように求める。

- ・ 反復 (ブロック因子 R) を無視しない (プールしない) 場合

$$\hat{V}(\text{点推定値}) = \frac{V_R}{N} + \frac{V_E}{n_e}$$

- ・ 反復 (ブロック因子 R) を無視する (プールする) 場合

$$\hat{V}(\text{点推定値}) = \frac{V_{E'}}{N} + \frac{V_{E'}}{n_e}$$

$$\text{〔田口の式〕 } \frac{1}{n_e} = \frac{\text{点推定に用いた要因 } (R \text{ は除く}) \text{ の自由度の和}}{\text{総データ数 } (N)}$$

◎テキスト 11-172 (分割法)

母平均の区間推定

$$(\text{点推定値}) \pm t(\phi^*, \alpha) \sqrt{\hat{V}(\text{点推定値})}$$

ここで、 $\hat{V}(\text{点推定値})$ は以下のように求める。

- ・ 反復 (ブロック因子 R) を無視しない (プールしない) 場合

$$\hat{V}(\text{点推定値}) = \frac{V_R}{N} + \frac{V_{E'(1)}}{n_{e(1)}} + \frac{V_{E'(2)}}{n_{e(2)}} + \dots$$

- ・ 反復 (ブロック因子 R) を無視する (プールする) 場合

$$\hat{V}(\text{点推定値}) = \frac{V_{E'(1)}}{N} + \frac{V_{E'(1)}}{n_{e(1)}} + \frac{V_{E'(2)}}{n_{e(2)}} + \dots$$

$$\text{〔田口の式〕 } \frac{1}{n_{e(i)}} = \frac{\text{点推定に用いた } i \text{ 次要因の自由度の和}}{\text{総データ数 } (N)}$$

反復は 0 次と考える。

◎テキスト 11-230, 238 (測定の繰返し $E_{(1)}$ をプールしない場合)

分割法の一つと考えることができる。

母平均の区間推定

$$(\text{点推定値}) \pm t(\phi_{E_{(1)}}, \alpha) \sqrt{\hat{V}(\text{点推定値})}$$

$$\hat{V}(\text{点推定値}) = \frac{V_{E'_{(1)}}}{N} + \frac{V_{E'_{(1)}}}{n_{e_{(1)}}} + \frac{V_{E'_{(2)}}}{n_{e_{(2)}}}$$
$$\frac{1}{n_{e_{(1)}}} = \frac{\text{点推定に用いた 1 次要因の自由度の和}}{\text{総データ数 } (N)}$$
$$\frac{1}{n_{e_{(2)}}} = \frac{\text{点推定に用いた 2 次要因の自由度の和}}{\text{総データ数 } (N)}$$

であるが、2 次要因はないので、 $\frac{1}{n_e} = 0$ となるので、実際

$$\hat{V}(\text{点推定値}) = \frac{V_{E'_{(1)}}}{N} + \frac{V_{E'_{(1)}}}{n_{e_{(1)}}}$$

反復は考えていない。

以上を集約して以下の式にまとめることができる。

*****まとめ*****

母平均の区間推定

$$(\text{点推定値}) \pm t(\phi^*, \alpha) \sqrt{\hat{V}(\text{点推定値})}$$

ここで、 $\hat{V}(\text{点推定値})$ は以下のように求める。

・反復 (ブロック因子 R) を無視しない (プールしない) 場合

$$\hat{V}(\text{点推定値}) = \frac{V_R}{N} + \frac{V_{E'_{(1)}}}{n_{e_{(1)}}} + \frac{V_{E'_{(2)}}}{n_{e_{(2)}}} + \dots$$

・反復 (ブロック因子 R) を無視する (プールする) 場合

$$\hat{V}(\text{点推定値}) = \frac{V_{E'_{(1)}}}{N} + \frac{V_{E'_{(1)}}}{n_{e_{(1)}}} + \frac{V_{E'_{(2)}}}{n_{e_{(2)}}} + \dots$$

$$\text{〔田口の式〕 } \frac{1}{n_{e_{(i)}}} = \frac{\text{点推定に用いた } i \text{ 次要因の自由度の和}}{\text{総データ数 } (N)}$$

反復は 0 次と考える。

前頁でまとめた内容に基づいて区間推定を行った例を以下に示す。

例 1. 二元配置 A, B が有意

構造式

$$x_{ijk} = \mu + a_i + b_j + \varepsilon_{ijk} \quad (i = 1 \sim l; j = 1 \sim m; k = 1 \sim r)$$

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j = 0, \quad \varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$$

$$\widehat{\mu}(A_i B_j) = \widehat{\mu + a_i + b_j} = \widehat{\mu + a_i} + \widehat{\mu + b_j} - \widehat{\mu}$$

$$= \bar{x}_{i..} + \bar{x}_{.j.} - \bar{x}$$

この場合、反復がなく、誤差も 1 つなので

$$\frac{1}{n_e} = \frac{\phi_A + \phi_B}{lmr} = \frac{(l-1) + (m-1)}{lmr} = \frac{l+m-2}{lmr}$$

$$\widehat{V}(A_i B_j) = \frac{V_E}{lmr} + \frac{l+m-2}{lmr} V_E = \frac{l+m-1}{lmr} V_E$$

つまり田口の式では、伊奈の式との n_e 合わせるために $\frac{1 + (\phi_A + \phi_B)}{N}$ と +1 の項を追加している。

例 2. 二元配置 $A, B, A \times B$ が有意

構造式

$$x_{ijk} = \mu + a_i + b_j + (ab)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$$\widehat{\mu}(A_i B_j) = \widehat{\mu + a_i + b_j + (ab)_{ij}} = \bar{x}_{ij.}$$

この場合も反復がなく誤差も 1 つなので

$$\frac{1}{n_e} = \frac{\phi_A + \phi_B + \phi_{A \times B}}{lmr} = \frac{(l-1) + (m-1) + (l-1)(m-1)}{lmr} = \frac{lm-1}{lmr}$$

$$\widehat{V}(A_i B_j) = \frac{V_E}{lmr} + \frac{lm-1}{lmr} V_E = \frac{1+lm-1}{lmr} V_E = \frac{1}{r} V_E$$

つまり田口の式は、伊奈の式の n_e と合わせるために田口の $\frac{1 + (\phi_A + \phi_B + \phi_{A \times B})}{N}$ と +1 の項を追加している。

[コメント]

田口の式で求める n_e は 1+ の項を表記せず

$$\frac{1}{n_e} = \frac{\text{点推定に用いた要因 (R を除く) の自由度の和}}{N}$$

とし、 \widehat{V} (点推定値) を求める式で、結果を合わせる方が理解しやすいと考える。

田口の式と伊奈の式は異なると覚えた方がよいのではないか。

もちろん、このようにまとめられるのも分散分析から実験計画法まで一通り学習した上で初めてこのように説明することができるということも理解しておいていただきたい。

以上