クロンバックの α 信頼性係数について（訂正第２版）

資料提供者：山田伊知郎
コメント者：稲葉太一

0. 元資料（ＳＱＣ部会資料 2000-4-3,2001-3-2）との関係

元資料で、クロンバックの α 係数についてコメントし、訂正を試みたが、一部勘違いによる誤解があったので、この資料で補足訂正する。

1. クロンバックの α 係数とは

アンケート調査の分野で、クロンバックの α という信頼性係数がよく用いられている。

これは、複数の項目間の回答の一致性を表わし、質問項目群が整合性を持つかどうかを調べるために用いられている。

2. 主な訂正内容

クロンバックの α 係数は、一元配置分散分析における寄与率ではなくて、項目を要因とする F_0 統計量と完全に同等で $\alpha = 1 - 1/F_0$ であることが分かった。繰り返しのない２元配置分散分析において、A_iB_j 水準のデータが x_{ij} としたとき、

$$x_{ij} = \mu + a_i + b_j + \varepsilon_{ij}, \quad (i = 1, \cdots, a;\ j = 1, \cdots, b)$$

$$\text{制約式：}\sum_{i=1}^{a} a_i = \sum_{j=1}^{b} b_j = 0, \quad \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

という構造式を考える。ここで、F_0 統計量とは、仮説 H_0：$\sigma_A^2 = 0$ という「要因 A が効果がない (a_i がすべて 0)」かどうかを検定するための統計量で、以下の式で与えられる。

$$F_0 = \frac{V_A}{V_E} = \frac{S_A/\phi_A}{S_E/\phi_E}$$

更に、$\phi_A = a - 1,\ \phi_E = (a-1)(b-1)$ を代入すると、次のようにも変形できる。

$$F_0 = \frac{S_A/(a-1)}{S_E/\{(a-1)(b-1)\}} = \frac{(b-1)S_A}{S_E}$$

ここで、$S_A = b\sum_{i=1}^{a}(\overline{x}_{i\cdot} - \overline{\overline{x}})^2, \quad S_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(x_{ij} - \overline{x}_{i\cdot} - \overline{x}_{\cdot j} + \overline{\overline{x}})^2$ であり、

$$S_T = S_A + S_B + S_E$$

という平方和の分解が成り立っている。

3. 詳細な説明

3.1. データ

n 人に、k 項目の質問をする状況を考える。i 番目の人の j 番目の項目の得点を X_{ij} とする。

3.2. クロンバック α 係数の定義

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left(1 - \sum_{j=1}^{k}\frac{S_j^2}{S_Y^2}\right) \tag{3.2.1}$$

ただし、

$$S_Y^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{k} S_{j\ell} \tag{3.2.2}$$

$$S_{j\ell} = \sum_{i=1}^{n}(X_{ij} - \overline{X}._j)(X_{i\ell} - \overline{X}._\ell)/(n-1), \quad S_j^2 = S_{jj} \tag{3.2.3}$$

である。

3.3. クロンバック α 係数と F_0 値が同等である説明

(3.2.2) 式を $(n-1)$ 倍してから、(3.2.3) 式を代入すると

$$(n-1)S_Y^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(X_{ij} - \overline{X}._j)(X_{i\ell} - \overline{X}._\ell)$$

となる。ここで、和を取る順番を変え、先に j と ℓ で和を取ると

$$\begin{aligned}(n-1)S_Y^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(X_{ij} - \overline{X}._j)\sum_{\ell=1}^{k}(X_{i\ell} - \overline{X}._\ell) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(k\overline{X}_i. - k\overline{\overline{X}})(\overline{X}_i. - k\overline{\overline{X}}) = k^2\sum_{i=1}^{n}(\overline{X}_i. - \overline{\overline{X}})^2 = kS_A \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

一方、$\sum_{j=1}^{k} S_j^2$ の $(n-1)$ 倍は、以下のように変形できる。

$$(n-1)\sum_{j=1}^{k} S_j^2 = \sum_{j=1}^{k}(n-1)S_{jj} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(X_{ij} - \overline{X}._j)^2 = S_T - S_B = S_A + S_E \tag{3.3.2}$$

これらのことから、クロンバック信頼係数 α は

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{S_A + S_E}{kS_A}\right) = \frac{k(kS_A - S_A - S_E)}{(k-1)kS_A} = \frac{(k-1)S_A - S_E}{(k-1)S_A} \\ &= 1 - \frac{S_E}{(k-1)S_A} = 1 - \frac{1}{F_0}\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

と変形できる。即ち、この信頼性係数は、実は項目と人を要因と考えた繰り返しのない二元配置分散分析の、項目の有意性を表す F_0 値と同等であった。

4. この結果の解釈と今後の課題

この信頼性係数は、最大が 1 で、最小はいくらでも小さくなる。一方、F_0 値は正規分布を誤差分散に仮定し、更に各誤差は等分散であることを仮定した下では、項目という要因の有意性についての検定ができる。そこで個人的にはクロンバック信頼係数よりも、何を仮定して何を検定しているかがはっきりしている F_0 値が使いやすいと判断する。このような本質的でない言い換えによって、クロンバック信頼係数 α が 0.7 以上であるのが望ましいとか、0.6 は低すぎるとかを議論しているのは、根拠を欠く議論であると考える。

ちなみに、$\alpha = 1 - 1/F_0$ ゆえ $1/F_0 = 1 - \alpha$ であるから $F_0 = 1/(1-\alpha)$ と分かる。つまり、$\alpha = 0.6$ とは $F_0 = 1/(1-0.6) = 2.25$ であるので、項目数が $6 \sim 10$ 程度で被験者数が数十人以上の場合は $\phi_A \geqq 5, \phi_E \geqq 100$ となるので $1 \sim 5\%$ 有意に相当する。$\alpha = 0.7$ は $F_0 = 1/(1-0.7) = 3.33$ であり、高度に有意であることに相当する。

今後の課題として、項目間の分散が異なるときに巧く調整する方法が望まれる。