創造応用 IS（稲葉）　　No.e10

2021.12.15(水 13:10 〜)

兵庫高校

（演習問題 10）「単回帰分析」

M 社ではある製品を製造しているが、この製品の原材料中の成分 A の含有率（x）と引っ張り強度（y）の関係を調べることになった。そこで、x と y について 30 組のデータを取ったところ表 1 を得た。以下の設問に答えよ。

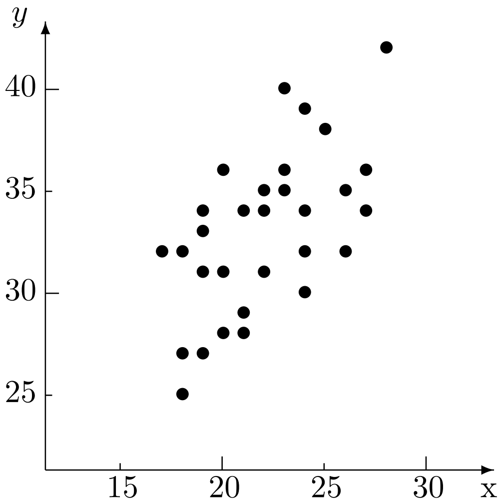

図 1．成分 A の含有率（x）と引っ張り強度（y）の散布図

（補足）このデータに以下の数値変換を行う。

$$X_i = (x_i - x_0) \times h = (x_i - 20) \times 1, \qquad Y_i = (y_i - y_0) \times h = (y_i - 30) \times 1$$

その結果、以下の統計量を得た。

$$\sum_{i=1}^{30} X_i = 60, \quad \sum_{i=1}^{30} Y_i = 90, \quad \sum_{i=1}^{30} X_i^2 = 390, \quad \sum_{i=1}^{30} Y_i^2 = 732, \quad \sum_{i=1}^{30} X_i Y_i = 393.$$

成分 A の含有率（x）を説明変数、引っ張り強度（y）を目的変数とした回帰分析を行え。

1. 回帰母数の点推定と分散分析表を作成せよ。

[手順 1] 統計量の計算

$$S_{xx} = S_{XX} = \sum_{i=1}^{30} (X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{30} X_i^2 - \frac{(\Sigma X_i)^2}{n} =$$

$$S_{yy} = S_{YY} = \sum_{i=1}^{30} (Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_{i=1}^{30} Y_i^2 - \frac{(\Sigma Y_i)^2}{n} =$$

$$S_{xy} = S_{XY} = \sum_{i=1}^{30} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) = \sum_{i=1}^{30} X_i Y_i - \frac{(\Sigma X_i)(\Sigma Y_i)}{n} =$$

$$\overline{x} = x_0 + \frac{\sum X_i}{n} = \qquad \overline{y} = y_0 + \frac{\sum Y_i}{n} =$$

学籍番号									氏　名	

[手順２] 回帰係数の計算

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} =, \qquad \widehat{\beta}_0 = \overline{y} - \widehat{\beta}_1 \overline{x} =$$

[手順３] 各平方和の計算

$$S_T = S_{yy} = \qquad S_R = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} =$$

$$S_e = S_T - S_R =$$

[手順４] 分散分析表の作成

$\phi_T = n - 1 =$ $\qquad \phi_R =$

$\phi_e = \phi_T - \phi_R =$

表１　分散分析表

要　因	S	ϕ	V	F_0	$F(0.05)$
R					
e					
T					

[手順５] 判定と結論

有意水準 5% で回帰には意味があったと { 言える, は言えない }。

2. x と y が関係があるかどうかの検定（β_1 の検定 ）を行え。

[手順１] 帰無仮説と対立仮説

帰無仮説 H_0 :

対立仮説 H_1 :

[手順２] 有意水準

$\alpha =$

[手順３] 棄却域

R :

[手順４] 検定統計量の計算

$$t_0 = \frac{\widehat{\beta}_1 - \beta_{10}}{\sqrt{V_e/S_{xx}}} =$$

[手順５] 判定と結論

有意水準 5% で回帰には意味があったと { 言える, は言えない }。

3. β_1 の信頼率 95% での区間推定を行え。

1) 点推定

$$\widehat{\beta}_1 =$$

2) 区間推定

$$\widehat{\beta}_1 \pm t(\phi_e, \alpha)\sqrt{V_e/S_{xx}} =$$

創造応用 IS（稲葉）　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　No.k10

2021.12.15(水 13:10 ～)

兵庫高校

（演習問題 10）「単回帰分析」（解答例）

M 社ではある製品を製造しているが、この製品の原材料中の成分 A の含有率（x）と引っ張り強度（y）の関係を調べることになった。そこで、x と y について 30 組のデータを取ったところ表 1 を得た。以下の設問に答えよ。

表 1　データ表

No.	x	y	No.	x	y	No.	x	y
1	24	32	11	19	33	21	24	30
2	21	28	12	24	39	22	20	28
3	22	35	13	23	40	23	18	27
4	17	32	14	27	34	24	26	32
5	20	31	15	19	27	25	25	38
6	23	35	16	22	31	26	27	36
7	18	32	17	18	25	27	28	42
8	21	34	18	23	36	28	24	34
9	22	34	19	21	29	29	20	36
10	26	35	20	19	31	30	19	34

（補足）このデータに以下の数値変換を行って、以下の統計量を得た。

$$X_i = (x_i - x_0) \times h = (x_i - 20) \times 1, \qquad Y_i = (y_i - y_0) \times h = (y_i - 30) \times 1$$

$$\sum_{i=1}^{30} X_i = 60, \quad \sum_{i=1}^{30} Y_i = 90, \quad \sum_{i=1}^{30} X_i^2 = 390, \quad \sum_{i=1}^{30} Y_i^2 = 732, \quad \sum_{i=1}^{30} X_i Y_i = 393.$$

成分 A の含有率（x）を説明変数、引っ張り強度（y）を目的変数とした回帰分析を行え。

1. 回帰母数の点推定と分散分析表を作成せよ。

[手順 1] 統計量の計算

$$S_{xx} = S_{XX} = \sum_{i=1}^{30} (X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{30} X_i^2 - \frac{(\Sigma X_i)^2}{n} = 390 - \frac{60^2}{30} = 270$$

$$S_{yy} = S_{YY} = \sum_{i=1}^{30} (Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_{i=1}^{30} Y_i^2 - \frac{(\Sigma Y_i)^2}{n} = 732 - \frac{90^2}{30} = 462$$

$$S_{xy} = S_{XY} = \sum_{i=1}^{30} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) = \sum_{i=1}^{30} X_i Y_i - \frac{(\Sigma X_i)(\Sigma Y_i)}{n} = 393 - \frac{60 \times 90}{30} = 213$$

$$\overline{x} = x_0 + \frac{\sum X_i}{n} = 20 + \frac{60}{30} = 22.0, \qquad \overline{y} = y_0 + \frac{\sum Y_i}{n} = 30 + \frac{90}{30} = 33.0$$

[手順 2] 回帰係数の計算

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{213}{270} = 0.7889, \qquad \widehat{\beta}_0 = \overline{y} - \widehat{\beta}_1 \overline{x} = 33.0 + 0.7889 \times 22.0 = 15.64$$

[手順３] 各平方和の計算

$$S_T = S_{yy} = 462.0, \qquad S_R = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} = \frac{213^2}{270} = 168.0$$
$$S_e = S_T - S_R = 462.0 - 168.0 = 294.0$$

[手順４] 分散分析表の作成

$\phi_T = n - 1 = 30 - 1 = 29, \quad \phi_R = 1, \quad \phi_e = \phi_T - \phi_R = 29 - 1 = 28$

表１　分散分析表

要　因	S	ϕ	V	F_0	$F(0.05)$
R	168.0	1	168.0	16.0*	4.196
e	294.0	28	10.50		
T	462.0	29			

[手順５] 判定と結論

有意水準 5% で回帰には意味があったと 言える。

2. x と y が関係があるかどうかの検定（β_1 の検定 ）を行え。

[手順１] 帰無仮説と対立仮説

帰無仮説 $H_0 : \beta_1 = \beta_{10}$ （$\beta_{10} = 0$）

対立仮説 $H_1 : \beta_1 \neq \beta_{10}$

[手順２] 有意水準

$\alpha = 0.05$

[手順３] 棄却域

$R : |t_0| \geqq t(\phi_e, \alpha) = t(28, 0.05) = 2.048$

[手順４] 検定統計量の計算

$$t_0 = \frac{\widehat{\beta}_1 - \beta_{10}}{\sqrt{V_e/S_{xx}}} = \frac{0.7889 - 0}{\sqrt{10.50/270}} = 4.000$$

[手順５] 判定と結論

$t_0 = 4.000 > 2.048 = t(\phi_e, \alpha)$ より、帰無仮説は棄却される。

有意水準 5% で回帰には意味があったと 言える。

3. β_1 の信頼率 95% での区間推定を行え。

1) 点推定

$\widehat{\beta}_1 = 0.7889$

2) 区間推定

$$\widehat{\beta}_1 \pm t(\phi_e, \alpha)\sqrt{V_e/S_{xx}} = 0.7889 \pm t(28, 0.05)\sqrt{10.50/270}$$
$$= 0.7889 \pm 2.048 \times 0.1972 = 0.7889 \pm 0.4039$$
$$= 0.3850, \quad 1.1928$$