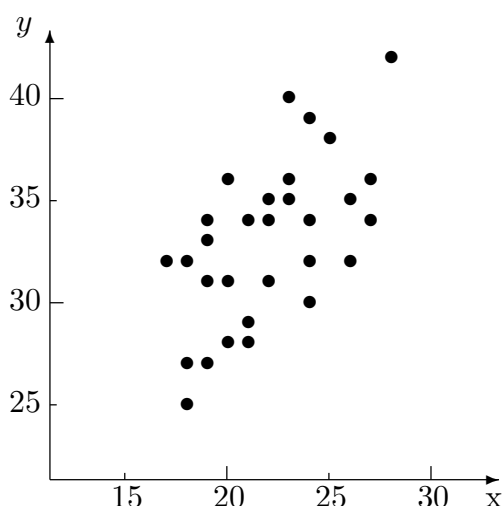


2021.12.15(水 13:10 ~)

兵庫高校

## (演習問題 10) 「単回帰分析」

$M$  社ではある製品を製造しているが、この製品の原材料中の成分  $A$  の含有率 ( $x$ ) と引っ張り強度 ( $y$ ) の関係を調べるようになった。そこで、 $x$  と  $y$  について 30 組のデータを取ったところ表 1 を得た。以下の設問に答えよ。

図 1. 成分  $A$  の含有率 ( $x$ ) と引っ張り強度 ( $y$ ) の散布図

(補足) このデータに以下の数値変換を行う。

$$X_i = (x_i - x_0) \times h = (x_i - 20) \times 1, \quad Y_i = (y_i - y_0) \times h = (y_i - 30) \times 1$$

その結果、以下の統計量を得た。

$$\sum_{i=1}^{30} X_i = 60, \quad \sum_{i=1}^{30} Y_i = 90, \quad \sum_{i=1}^{30} X_i^2 = 390, \quad \sum_{i=1}^{30} Y_i^2 = 732, \quad \sum_{i=1}^{30} X_i Y_i = 393.$$

成分  $A$  の含有率 ( $x$ ) を説明変数、引っ張り強度 ( $y$ ) を目的変数とした回帰分析を行え。

## 1. 回帰母数の点推定と分散分析表を作成せよ。

[手順 1] 統計量の計算

$$S_{xx} = S_{XX} = \sum_{i=1}^{30} (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{30} X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n} =$$

$$S_{yy} = S_{YY} = \sum_{i=1}^{30} (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{30} Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n} =$$

$$S_{xy} = S_{XY} = \sum_{i=1}^{30} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum_{i=1}^{30} X_i Y_i - \frac{(\sum X_i)(\sum Y_i)}{n} =$$

$$\bar{x} = x_0 + \frac{\sum X_i}{n} = \quad \quad \quad \bar{y} = y_0 + \frac{\sum Y_i}{n} =$$

番 号					氏 名	
-----	--	--	--	--	-----	--

[手順 2] 回帰係数の計算

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} =, \quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} =$$

[手順 3] 各平方和の計算

$$S_T = S_{yy} = \quad S_R = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} =$$

$$S_e = S_T - S_R =$$

[手順 4] 分散分析表の作成

$$\phi_T = n - 1 = \quad \phi_R =$$

$$\phi_e = \phi_T - \phi_R =$$

表 1 分散分析表

要 因	$S$	$\phi$	$V$	$F_0$	$F(0.05)$
$R$					
$e$					
$T$					

[手順 5] 判定と結論

有意水準 5% で回帰には意味があったと { 言える, は言えない }。

2.  $x$  と  $y$  が関係があるかどうかの検定 ( $\beta_1$  の検定) を行え。

[手順 1] 帰無仮説と対立仮説

帰無仮説  $H_0$  :

対立仮説  $H_1$  :

[手順 2] 有意水準

$$\alpha =$$

[手順 3] 棄却域

$$R :$$

[手順 4] 検定統計量の計算

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{10}}{\sqrt{V_e/S_{xx}}} =$$

[手順 5] 判定と結論

有意水準 5% で回帰には意味があったと { 言える, は言えない }。

3.  $\beta_1$  の信頼率 95% での区間推定を行え。

1) 点推定

$$\hat{\beta}_1 =$$

2) 区間推定

$$\hat{\beta}_1 \pm t(\phi_e, \alpha) \sqrt{V_e/S_{xx}} =$$

2021.12.15(水 13:10 ~)

兵庫高校

(演習問題 10) 「単回帰分析」(解答例)

$M$  社ではある製品を製造しているが、この製品の原材料中の成分  $A$  の含有率 ( $x$ ) と引っ張り強度 ( $y$ ) の関係を調べることになった。そこで、 $x$  と  $y$  について 30 組のデータを取ったところ表 1 を得た。以下の設問に答えよ。

表 1 データ表

No.	$x$	$y$	No.	$x$	$y$	No.	$x$	$y$
1	24	32	11	19	33	21	24	30
2	21	28	12	24	39	22	20	28
3	22	35	13	23	40	23	18	27
4	17	32	14	27	34	24	26	32
5	20	31	15	19	27	25	25	38
6	23	35	16	22	31	26	27	36
7	18	32	17	18	25	27	28	42
8	21	34	18	23	36	28	24	34
9	22	34	19	21	29	29	20	36
10	26	35	20	19	31	30	19	34

(補足) このデータに以下の数値変換を行って、以下の統計量を得た。

$$X_i = (x_i - x_0) \times h = (x_i - 20) \times 1, \quad Y_i = (y_i - y_0) \times h = (y_i - 30) \times 1$$

$$\sum_{i=1}^{30} X_i = 60, \quad \sum_{i=1}^{30} Y_i = 90, \quad \sum_{i=1}^{30} X_i^2 = 390, \quad \sum_{i=1}^{30} Y_i^2 = 732, \quad \sum_{i=1}^{30} X_i Y_i = 393.$$

成分  $A$  の含有率 ( $x$ ) を説明変数、引っ張り強度 ( $y$ ) を目的変数とした回帰分析を行え。

1. 回帰母数の点推定と分散分析表を作成せよ。

[手順 1] 統計量の計算

$$S_{xx} = S_{XX} = \sum_{i=1}^{30} (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{30} X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n} = 390 - \frac{60^2}{30} = 270$$

$$S_{yy} = S_{YY} = \sum_{i=1}^{30} (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{30} Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n} = 732 - \frac{90^2}{30} = 462$$

$$S_{xy} = S_{XY} = \sum_{i=1}^{30} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum_{i=1}^{30} X_i Y_i - \frac{(\sum X_i)(\sum Y_i)}{n} = 393 - \frac{60 \times 90}{30} = 213$$

$$\bar{x} = x_0 + \frac{\sum X_i}{n} = 20 + \frac{60}{30} = 22.0, \quad \bar{y} = y_0 + \frac{\sum Y_i}{n} = 30 + \frac{90}{30} = 33.0$$

[手順 2] 回帰係数の計算

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{213}{270} = 0.7889, \quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 33.0 + 0.7889 \times 22.0 = 15.64$$

[手順3] 各平方和の計算

$$S_T = S_{yy} = 462.0, \quad S_R = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} = \frac{213^2}{270} = 168.0$$
$$S_e = S_T - S_R = 462.0 - 168.0 = 294.0$$

[手順4] 分散分析表の作成

$$\phi_T = n - 1 = 30 - 1 = 29, \quad \phi_R = 1, \quad \phi_e = \phi_T - \phi_R = 29 - 1 = 28$$

表1 分散分析表

要因	$S$	$\phi$	$V$	$F_0$	$F(0.05)$
$R$	168.0	1	168.0	16.0*	4.196
$e$	294.0	28	10.50		
$T$	462.0	29			

[手順5] 判定と結論

有意水準 5% で回帰には意味があったと 言える。

2.  $x$  と  $y$  が関係があるかどうかの検定 ( $\beta_1$  の検定) を行え。

[手順1] 帰無仮説と対立仮説

帰無仮説  $H_0: \beta_1 = \beta_{10}$  ( $\beta_{10} = 0$ )

対立仮説  $H_1: \beta_1 \neq \beta_{10}$

[手順2] 有意水準

$$\alpha = 0.05$$

[手順3] 棄却域

$$R: |t_0| \geq t(\phi_e, \alpha) = t(28, 0.05) = 2.048$$

[手順4] 検定統計量の計算

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{10}}{\sqrt{V_e/S_{xx}}} = \frac{0.7889 - 0}{\sqrt{10.50/270}} = 4.000$$

[手順5] 判定と結論

$t_0 = 4.000 > 2.048 = t(\phi_e, \alpha)$  より、帰無仮説は棄却される。

有意水準 5% で回帰には意味があったと 言える。

3.  $\beta_1$  の信頼率 95% での区間推定を行え。

1) 点推定

$$\hat{\beta}_1 = 0.7889$$

2) 区間推定

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 \pm t(\phi_e, \alpha) \sqrt{V_e/S_{xx}} &= 0.7889 \pm t(28, 0.05) \sqrt{10.50/270} \\ &= 0.7889 \pm 2.048 \times 0.1972 = 0.7889 \pm 0.4039 \\ &= 0.3850, \quad 1.1928 \end{aligned}$$