2021.12.24(金２)
ZOOM

付録 **P.3.** 本来のペリ法によるアルゴリズム（再掲載）

ここで、K における各パーティション $\boldsymbol{P}$ の定める仮説 $H_{\boldsymbol{P}}$ に対する有意水準の配分 α^* として、前節で述べた有意水準の配分 α^{SP}, α^{NP} のいずれかを考える。このとき、閉検定手順は、以下のアルゴリズムを導く。

手順１：$stage = k-1$ の仮説を有意水準 α で検定する。
　1) 保留される　ならば　すべての仮説を保留して、終了する。
　2) 棄却される　ならば　$p=1$ として 手順２へ進む。
手順２：$stage = k-p-1$ から仮説 H_1 を 1 つ選び、手順３へ進む。
手順３：$stage = k-p$ に含まれて、H_1 を誘導するすべての仮説を調べる。
　1) 1 つ以上が保留　ならば　H_1 を保留する。
　2) すべて棄却　　　ならば　H_1 を有意水準の配分 α^* で検定して、棄却か保留を決める。
　いずれにせよ、 手順４へ進む。
手順４：$stage = k-p-1$ に含まれている、すべての仮説を調べる。
　1) まだ判定していない仮説があれば、そのうちの 1 つを H_1 として、手順３を繰り返す。
　2) すべての仮説の判定が終わっていたら 手順５へ進む。
手順５：$k-p-1$ が 1 と等しいかどうか調べる。
　1) $k-p-1=1$ なら、終了する。
　2) $k-p-1>1$ なら、$p=p+1$ として、手順３に進む。

補足１：手順２で選ぶ仮説は、1 節の補題１ より、どの順番でも構わない。
補足２：手順３で誘導関係を調べる対象は、1 節の補題２ より 1 つ上の stage のみで十分である。

1 節の議論より、このアルゴリズムはコヒーレンスが成り立つように構成されており、一般的な閉検定手順の定理より、Type I FWE をコントロールしていることが分かる。
以下では、このアルゴリズムを<u>**「Peritz 手順」**</u>と呼ぶことにする。

定理１：このアルゴリズムで構成される手法（**Peritz 手順**）は、コヒーレンスが成り立ち、最大 Type I FWE は α 以下で抑えられる。

この Peritz 手順において、標準的な (Standard な) 有意水準の配分を用いた Peritz 手順を「<u>**S-Peritz MCP 法**</u>」といい、この手順で棄却されることを「<u>**SP-MCP 棄却**</u>」、この手順で保留されることを「<u>**SP-MCP 保留**</u>」という。
また、自然な (Natural な) 有意水準の配分を用いた Peritz 手順を「<u>**N-Peritz MCP 法**</u>」といい、この手順で棄却されることを「<u>**NP-MCP 棄却**</u>」、この手順で保留されることを「<u>**NP-MCP 保留**</u>」という。

付録 **P.4. BG** アルゴリズムと本来のペリ法の関係（詳細版）

この Peritz 手順において、標準的な (Standard な) 有意水準の配分を用いた Peritz 手順を「S-Peritz MCP 法」といい、この手順で保留されることを「SP-MCP 保留」という。

また、自然な (Natural な) 有意水準の配分を用いた Peritz 手順を「N-Peritz MCP 法」といい、この手順で保留されることを「NP-MCP 保留」という。

今から、現在、広くペリ法として認識されている BG アルゴリズムと、ここで提案した SP-MCP 法、NP-MCP 法の関係を明らかにする。

定理２：SP-MCP 保留である任意の仮説は、BG 保留である。

証明：$\boldsymbol{P} = (P_1, \cdots, P_r)$ に関して、$H_{\boldsymbol{P}}$ が SP-検定保留とする。
1) $r = 1$ のとき $\boldsymbol{P} = (P_1)$ であり、$H_{\boldsymbol{P}}$ が SP 検定保留であるから、(3.3) 式より $r = 1$ の時は NK 検定保留となり、BG 法の定義 I より、BG 保留となる。
2) $r \geq 2$ のとき $H_{\boldsymbol{P}}$ が SP 検定保留ということは、(3.3) 式より、任意の i で H_{P_i} が $\alpha^{SP}_{\boldsymbol{P},i}$ 検定で保留、即ち、任意の i で H_{P_i} が $\alpha^{R}_{\boldsymbol{P},i}$ 検定で保留となる。

このとき、任意の i に対して、$\exists j (\neq i)$ であり、H_{P_i}, H_{P_j} は共に、Ryan 検定保留より、BG 法の定義 Ib より、任意の i に対して、H_{P_i} は BG 保留となる。

したがって、A.4 節の複合仮説に対する BG 法の定義より、$H_{\boldsymbol{P}}$ も BG 保留となる。

ここで、$\boldsymbol{P} = (P_1, \cdots, P_r)$ に関して、$H_{\boldsymbol{P}}$ が SP-MCP 保留とする。

このとき、$H_{\boldsymbol{P}}$ 自身が SP 検定保留であれば、ここまでの議論より、BG 保留であることが分かる。

一方、そうでないときは、ある $\boldsymbol{Q} = (Q_1, \cdots, Q_s)$ があって、$H_{\boldsymbol{Q}}$ は $H_{\boldsymbol{P}}$ を誘導し、かつ、SP 検定保留とできる。このとき、$H_{\boldsymbol{Q}}$ は、BG 保留と分かる。すると、BG 法のコヒーレンス性より、$H_{\boldsymbol{P}}$ も、BG 保留であると導かれる。 証明終

ある単純仮説 $H_{\boldsymbol{P}}$ が、BG アルゴリズムで保留される（「BG 保留」と略記する）とき、これが極大であるとは、以下の 2 つが成り立つこととする。

1) $H_{\boldsymbol{P}}$ は、単純仮説で BG 保留であり、かつ
2) $H_{\boldsymbol{P}}$ を誘導する任意の単純仮説 $H_{\boldsymbol{Q}}$ は、BG 保留ではない。

同様に、「SP-MCP 法で保留（「SP-MCP 保留」と略記する）の意味での極大」という概念も定義できる。

補題３：極大 BG 保留である単純仮説は、SP-MCP 保留である。

証明：単純仮説 $H_{\boldsymbol{P}} = H_{(P)}$ が極大 BG 保留とする。$H_{\boldsymbol{P}} = H_P$ が BG 保留であれば、BG での単純仮説の判定の定義より (A.3 節参照)、NK-MCP 保留であるかまたは、

「Ia) BG 保留である仮説 $H_{\boldsymbol{Q}}$ があって、H_P を誘導する」かまたは、

「Ib) H_P は Ryan 検定保留、かつ、$\exists R \subset P^c \quad \text{s.t.} \quad H_R$ は Ryan 検定保留」となる。ここで、H_P が極大であるから、(Ia) は起こらない。また、Ib) は、$H_{\{P,R\}}$ が、SP 検定保留となり、SP-MCP 保留となる。このとき、SP-MCP 法のコヒーレンスより、H_P は、SP-MCP 保留となる。

残る場合は、H_P は NK MCP's 保留である。もし、H_P を誘導する単純仮説 H_Q で、NK 検定保留の仮説があれば、この H_Q は BG 保留になる。これは、H_P が、極大 BG 保留であることに反する。つまり、BG 法の意味での NK-MCP 法は、単純仮説においての誘導関係のみを調べるので、H_P は、NK 検定保留であることがわかる。

すると、SP 保留の定義より、$H_{\boldsymbol{P}}$ は SP 保留であることがわかる。 証明終