2021.11.16(火２)
ZOOM

Prop.D8（誤差の伝播定理）

(i) $X_n \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right) \quad (n \to \infty), \quad \sigma > 0$

(ii) $f : R^1 \to R^1$,　点 μ で微分可能,　$f'(\mu) \neq 0$

$\Longrightarrow$

$$f(X_n) \sim N\left(f(\mu), \frac{\sigma^2}{n}\Big[f'(\mu)\Big]^2\right) \quad (n \to \infty)$$

証明：(i) より、$\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}(X_n - \mu) \overset{d}{\to} N(0,1)$ (1)

Prop.D7(iii),(v)b を使って、$X_n \overset{p}{\to} \mu$

$Y_n := \dfrac{f(X_n) - f(\mu)}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}|f'(\mu)|}$ とおくとき、$Y_n \overset{d}{\to} N(0,1)$ を言えば良い。

$g(x) := \dfrac{f(x) - f(\mu)}{x - \mu} - f'(\mu)$ とおくと、$\lim_{x \to \mu} g(x) = 0$

$$f(x) - f(\mu) = (x - \mu)\Big[g(x) + f'(\mu)\Big]$$

よって、
$$\begin{aligned} Y_n &= \frac{\sqrt{n}}{\sigma|f'(\mu)|}(X_n - \mu)\Big[g(X_n) + f'(\mu)\Big] \\ &= \frac{f'(\mu)}{|f'(\mu)|}\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(X_n - \mu) + \frac{1}{|f'(\mu)|}\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(X_n - \mu)g(X_n) \end{aligned} \tag{2}$$

(1) 式より、Prop.D7(iii) を用いると、$\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}(X_n - \mu) = Op(1)$ (3)

ここでもし、$g(X_n) = op(1)$ が言えれば、(3) 式と併せて、Prop.D7(v)b より、(2) 式の第 2 項は $op(1)$ だとわかる。

更に、(2) 式の第 1 項は、$\frac{f'(\mu)}{|f'(\mu)|} = \pm 1$ と (3) 式より $N(0,1)$ に分布収束する。

Prop.D5(i) より、和を取ると、(2) 式が $N(0,1)$ に分布収束することが分かる。　証明終

命題：$g(X_n) = op(1)$ を示せ。

証明：$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to \infty} P\{|g(X_n)| < \varepsilon\} = 1$ を言えば良い。

ここで、$\lim_{x \to \mu} g(x) = 0$ より、

$$\exists \delta > 0 \quad s.t. \quad |x - \mu| < \delta \Longrightarrow |g(x)| < \varepsilon$$

つまり、$P\{|g(X_n)| < \varepsilon\} \geqq P\{|X_n - \mu| < \delta\} \to 1 \quad (n \to \infty)$ が成り立つ。　証明終

Def.D5 $\{\boldsymbol{X}_n\}$: p 次元 r.v. の列, $\boldsymbol{a} \in R^p$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P\{||\boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{a}|| < \varepsilon\} = 1$$

が成立するとき、$\boldsymbol{X}_n$ は、$\boldsymbol{a}$ に **確率収束** するといい、$\boldsymbol{X}_n \overset{p}{\to} \boldsymbol{a}$ で表わす。

$\boldsymbol{X}_n \overset{p}{\to} \boldsymbol{0}$ のとき、$\boldsymbol{X}_n = op(\boldsymbol{1})$ と書く。

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M < \infty, \quad \forall n, \quad P\{||\boldsymbol{X}_n|| > M\} < \varepsilon$$

ならば、$\boldsymbol{X}_n$ は、**確率有界** であるといい、$\boldsymbol{X}_n = Op(\boldsymbol{1})$ で表わす。

Def.D6 $\boldsymbol{F}$: p 次元 r.v. $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_p)$ の c.d.f.

$$P\{X_i = a_i\} = 0 \qquad (i = 1, \cdots, p)$$

が成立するような点 $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_p)$ の全体を C_F で表わすことにする。

$$\forall \boldsymbol{a} \in C_F, \quad \lim_{n\to\infty} F_n(\boldsymbol{a}) = F(\boldsymbol{a})$$

が成立するとき、p 次元 r.v. $\boldsymbol{X}_n$ の c.d.f. の列 F_n は、F に収束するといい、

$F_n \to F \;\; (n \to \infty)$ と書く。

また、$\boldsymbol{X}_n$ は、$\boldsymbol{X}$ に **分布収束（法則収束）** するといい、

$\boldsymbol{X}_n \overset{d}{\to} \boldsymbol{X}$ または $\boldsymbol{X}_n \overset{d}{\to} F$ と書く。

[注意] : 上の定義によれば、点 $\boldsymbol{a}$ で F が連続であっても、必ずしも $\boldsymbol{a} \in C_F$ は成立しない。

反例： $P\{X_1 = a_1, \; X_2 > a_2\} > 0$

Prop.D9 $\{\boldsymbol{X}_n\}$ i.i.d. $\boldsymbol{\mu} = E(\boldsymbol{X}_1)$

$$\overline{\boldsymbol{X}} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i$$

$\Longrightarrow$

(i) $\overline{\boldsymbol{X}} \overset{p}{\to} \boldsymbol{\mu} \quad (n \to \infty)$ 弱大数の法則

(ii) さらに、$\Sigma = var(\boldsymbol{X}_1)$ が存在するとき、

$$\overline{\boldsymbol{X}} \sim N_p\left(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{n}\Sigma\right) \quad (n \to \infty)$$ 中心極限定理

Prop.D10

(i) $\boldsymbol{X}_n \sim N_p\left(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{n}\Sigma\right) \quad (n \to \infty), \quad \Sigma$: 正値

(ii) $\boldsymbol{f} = (f_1, \cdots, f_q)' : R^p \to R^q$, 点 $\boldsymbol{\mu}$ で C^1 級

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{\mu}} := \left[\frac{\partial f_i}{\partial \mu_j}\right]_{1 \le i \le q,\ 1 \le j \le p} \quad \text{の rank は } q$$

$\Longrightarrow$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_n) \sim N_q\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\mu}),\ \frac{1}{n}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{\mu}}\right)\Sigma\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{\mu}}\right)'\right) \quad (n \to \infty)$$

証明：まず、剰余項を $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ とおいて、多次元でのテーラー展開を下記に記す。

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\mu}) + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) + ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}||\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$

$$\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$

$$\sqrt{n}\Big[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_n) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\mu})\Big] = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{\mu}}\sqrt{n}(\boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{\mu}) + ||\sqrt{n}(\boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{\mu})||\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}_n)$$

ここで、$\sqrt{n}(\boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{d} N(\boldsymbol{0}, \Sigma)$ であり、$||\sqrt{n}(\boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{\mu})|| = Op(1),\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}_n) = op(1)$ より、結論が得られる。 証明終

Lem.D4（陰関数の定理）

(1) $\boldsymbol{F} = (F_1, \cdots, F_q)' : R^p \times R^q \to R^q \qquad C^1$ 級の関数

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

(2) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{0}$

(3) $\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{\mu}}$ ：(k, i) 要素として、$\dfrac{\partial F_k}{\partial \mu_i}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu})$ をもつ $q \times p$ 行列

$\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ ：(k, j) 要素として、$\dfrac{\partial F_k}{\partial \nu_j}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu})$ をもつ $q \times q$ 行列

とするとき $\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ は正則

$\Longrightarrow$

(i) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ で $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\nu}$ をみたすものは

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\mu}$ の周りで C^1 級の関数

(ii) $\dfrac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial \boldsymbol{\mu}} := \left[\dfrac{\partial y_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{\mu})\right] = -\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)^{-1}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{\mu}}\right)$

[注意]：$\boldsymbol{0} = \dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} = \dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} + \dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\dfrac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}$

Prop.D11

(1) $\boldsymbol{F}$: Lem.D4 の条件をみたす

(2) $\boldsymbol{X}_n \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{n}\Sigma) \quad (n \to \infty), \quad \Sigma$: 正則

(3) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_n, \boldsymbol{Y}_n) = \boldsymbol{0}$

$\Longrightarrow$

$$\boldsymbol{Y}_n \sim N_q\left(\boldsymbol{\nu},\ \frac{1}{n}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\nu}}{\partial\boldsymbol{\mu}}\right)\Sigma\left(\frac{\partial\boldsymbol{\nu}}{\partial\boldsymbol{\mu}}\right)'\right) \quad (n \to \infty)$$

ただし、$\dfrac{\partial\boldsymbol{\nu}}{\partial\boldsymbol{\mu}}$ は、Lem.D4 の (ii) で与えられる。