Prop.D2（中心極限定理）

$$\left.\begin{array}{l}\{X_n\} : i.i.d. \\ \mu = E(X_1),\ \sigma^2 = var(X_1)\end{array}\right\} \implies \overline{X} \sim N(\mu, \tfrac{\sigma^2}{n}) \quad (n \to \infty)$$

$\because$　確率論の本を見よ。

Prop.D3（確率収束の保存）

$$\left.\begin{array}{l}X_n \overset{p}{\to} a\ (n \to \infty) \\ f : R^1 \to R^1,\ \text{点 } a \text{ で連続}\end{array}\right\} \implies f(X_n) \overset{p}{\to} f(a) \quad (n \to \infty)$$

証明：$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} P\{|f(X_n) - f(a)| < \varepsilon\} = 1$　$(*)$

をいえばよい。より丁寧に言うと、次が成り立てばよい。

$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$\forall \varepsilon_1 > 0,\ \exists N$

$$s.t.\quad n \geqq N \quad \text{ならば} \quad P\{|f(X_n) - f(a)| < \varepsilon\} > 1 - \varepsilon_1 \qquad (**)$$

f の連続性から、$\forall \varepsilon > 0$ に対して、

$$\exists \delta > 0,\ |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad (1)$$

ゆえに、$P\{|f(X_n) - f(a)| < \varepsilon\} \geq P\{|X_n - a| < \delta\}$　(2)

ここで、$X_n \overset{p}{\to} a\ (n \to \infty)$ より、上式の δ に対しても、$P\{|X_n - a| < \delta\} \to 1$ が成り立つ。

ゆえに、$\forall \varepsilon_1 > 0,\ \exists N_0 \quad s.t. \quad n \geqq N_0 \implies P\{|X_n - a| < \delta\} > 1 - \varepsilon_1$　(3)

したがって、(2),(3) より、$P := P\{|f(X_n) - f(a)| < \varepsilon\} \geq P\{|X_n - a| < \delta\} > 1 - \varepsilon_1$ が示された。これは、$(**)$ が成り立つことを意味している。　証明終

Prop.D4（分布収束の保存）

$$\left.\begin{array}{l}X_n \overset{d}{\to} X \\ f : R^1 \to R^1 \text{ 連続}\end{array}\right\} \implies f(X_n) \overset{d}{\to} f(X) \quad (n \to \infty)$$

$\because$　f が狭義単調増加関数の場合だけ証明する。

$$\forall a \in C_{f(X)} \quad \lim_{n\to\infty} P\{f(X_n) \leq a\} = P\{f(X) \leq a\}$$

をいえばよい。

$$\begin{aligned} a \in C_{f(X)} &\implies P\{f(X) = a\} = 0 \\ &\implies P\{X = f^{-1}(a)\} = 0 \implies f^{-1}(a) \in C_X \end{aligned}$$

さて、

$$\begin{aligned} &P\{f(X_n) \leq a\} = P\{X_n \leq f^{-1}(a)\} \\ &\qquad \to \quad P\{X \leq f^{-1}(a)\} = P\{f(X) \leq a\} \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

上極限、下極限（解析学の参考文献より引用）

定義：数列 $\{a_n\}$ に対して、$\ell_s := \sup\{a_n|\ n \geqq s\},\ m_s := \inf\{a_n|\ n \geqq s\}$ とおく。

数列 $\{a_n\}$ が有界ならば、

$$m_1 \leqq m_2 \leqq \cdots \leqq m_s \leqq \cdots \leqq \ell_s \leqq \cdots \leqq \ell_2 \leqq \ell_1$$

となり、数列 $\{m_s\},\ \{\ell_s\}$ は共に有界単調で極限値を持ち、

$$\lim_{s\to\infty} m_s = \sup\{m_s|\ s = 1, 2, \cdots\} \leqq \inf\{\ell_s|\ s = 1, 2, \cdots\} = \lim_{s\to\infty} \ell_s$$

が成り立つ。この極限値をそれぞれ $\varliminf_{n\to\infty} a_n,\ \varlimsup_{n\to\infty} a_n$ で表し、数列 $\{a_n\}$ の 下極限、上極限 という。すなわち、

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \sup\{\inf\{a_m|\ m \geqq n\}|\ n \geqq 1\}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \inf\{\sup\{a_m|\ m \geqq n\}|\ n \geqq 1\}$$

約束１：数列 $\{a_n\}$ が上に有界でないとき、$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \infty$ と定義する。

約束２：数列 $\{a_n\}$ が下に有界でないとき、$\varliminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$ と定義する。

約束３：数列 $\{a_n\}$ が上に有界で、下に有界でないときは、次で定義する。

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \inf\{\sup\{a_m|\ m \geqq n\}|\ n \geqq 1\}$$

約束４：数列 $\{a_n\}$ が下に有界で、上に有界でないときは、次で定義する。

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \sup\{\inf\{a_m|\ m \geqq n\}|\ n \geqq 1\}$$

定理：有界数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は、$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \varliminf_{n\to\infty} a_n$ である。

例１：$a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ のとき、$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = 1,\ \varliminf_{n\to\infty} a_n = -1.$

例２：$a_n = (-1)^n n^2$ のとき、$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = +\infty,\ \varliminf_{n\to\infty} a_n = -\infty.$

例３：$a_n = n^2 + n$ のとき、$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \infty,\ \varliminf_{n\to\infty} a_n = \infty.$

例４：$a_{2n} = 1,\ a_{2n+1} = 1 - n$ のとき、$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = 1,\ \varliminf_{n\to\infty} a_n = -\infty.$

性質１：$\varlimsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leqq \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n$

性質２：$\varliminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) \geqq \varliminf_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} b_n$

Prop.D5 $X_n \xrightarrow{d} X,\ Y_n \xrightarrow{p} c,\ \ (n\to\infty)$

$\Longrightarrow$ (i) $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$

(ii) $X_n - Y_n \xrightarrow{d} X - c$

(iii) $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$

(iv) $c \neq 0$ ならば、$\dfrac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{d} \dfrac{X}{c}$

証明：(i) だけを証明する。

$\forall a \in C_{X+c},\ \ \lim_{n\to\infty} P\{X_n + Y_n \leqq a\} = P\{X + c \leqq a\}$ をいえばよい。

第 1 段：$\forall \varepsilon > 0,\ \ a - c + \varepsilon \in C_X$ のとき、

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ P\{X_n + Y_n \leqq a\} \leqq P\{X \leqq a - c + \varepsilon\}$ を示す。

$a \in C_{X+c} \iff P\{X + c = a\} = 0 \iff P\{X = a - c\} = 0 \iff a - c \in C_X$

第 1 段の証明：
$$P\{X_n + Y_n \leqq a\} = P\{X_n + Y_n \leqq a,\ |Y_n - c| \leqq \varepsilon\} + P\{X_n + Y_n \leqq a,\ |Y_n - c| > \varepsilon\} \tag{1}$$

右辺の第 1 項は、$A \to B$ ならば $P(A) \leqq P(B)$ より、

$$P\{X_n + Y_n \leqq a,\ |Y_n - c| \leqq \varepsilon\} \leqq P\{X_n \leqq a - c + \varepsilon\} \tag{2}$$

右辺の第 2 項も、同様に、次の関係式が得られる。

$$P\{X_n + Y_n \leqq a,\ |Y_n - c| > \varepsilon\} \leqq P\{|Y_n - c| > \varepsilon\} \tag{3}$$

(1),(2),(3) より、次の式が得られる。

$$P\{X_n + Y_n \leqq a\} \leqq P\{X_n \leqq a - c + \varepsilon\} + P\{|Y_n - c| > \varepsilon\} \tag{4}$$

これら両辺の上極限を取ると、次の式が得られる。

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ P\{X_n + Y_n \leqq a\} \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}}\ P\{X_n \leqq a - c + \varepsilon\} + \overline{\lim_{n\to\infty}}\ P\{|Y_n - c| > \varepsilon\} \tag{5}$$

$a - c + \varepsilon \in C_X$ ならば 右辺第 1 項 $= P\{X \leqq a - c + \varepsilon\}$ となる。また、$Y_n \xrightarrow{p} c$ ゆえ、第 2 項 $= 0$ となる。したがって、第 1 段の結論を得る。　**第 1 段の証明終**

第 2 段：$\forall \varepsilon > 0,\ \ a - c - \varepsilon \in C_X$ のとき、

$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ P\{X_n + Y_n \leqq a\} \geqq P\{X \leqq a - c - \varepsilon\}$ は第 1 段と同様に示される。

第 1 段と第 2 段をまとめると、$\forall \varepsilon > 0,\ \ a - c \pm \varepsilon \in C_X$ のとき、

$$P\{X \leqq a - c - \varepsilon\} \leqq \underline{\lim_{n\to\infty}}\ P\{X_n + Y_n \leqq a\} \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}}\ P\{X_n + Y_n \leqq a\} \leqq P\{X \leqq a - c + \varepsilon\}$$

$\varepsilon \to 0$ とすると、$a - c \pm \varepsilon \in C_X$ より、$P\{X \leqq a - c - \varepsilon\},\ P\{X \leqq a - c + \varepsilon\}$ は共に、$P\{X \leqq a - c\} = P\{X + c \leqq a\}$ に収束する。

よって、$\lim_{n\to\infty} P\{X_n + Y_n \leqq a\} = P\{X + c \leqq a\}$ が示された。　**証明終**

Prop.D6 X_n : 1 次元 r.v. $(n = 1, 2, \cdots)$

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n^2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad X_n = op(1)$$

略証：Lem.D1 より

Def.D4 X_n : 1 次元 r.v. $(n = 1, 2, \cdots)$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M < \infty, \quad \forall n, \quad P\{|X_n| \leq M\} > 1 - \varepsilon$$

が成立するとき、X_n は、**確率有界** であるといい、$X_n = Op(1)$ で表わす。
（Mann-Wald の記号）

数列 $\{r_n\}$ に対し、$\dfrac{X_n}{r_n} = Op(1)$ のとき、$X_n = Op(r_n)$ と書く。

Prop.D7 (i)a $O(1) \Longrightarrow Op(1)$ (i)b $o(1) \Longrightarrow op(1)$

(ii)a $op(1) \Longrightarrow Op(1)$ (ii)b $o(1) \Longrightarrow O(1)$

(iii) $X_n \overset{d}{\to} X \quad \Longrightarrow \quad X_n = Op(1)$

(iv)a $Op(1) + Op(1) = Op(1)$ (iv)b $op(1) + op(1) = op(1)$

(v)a $Op(1)Op(1) = Op(1)$ (v)b $op(1)Op(1) = op(1)$

[注意]：次のようなことを意味している。

(i)a 実数列 X_n が $O(1)$ ならば、$X_n = Op(1)$

(ii) $X_n = op(1) \quad \Longrightarrow \quad X_n = Op(1)$

(iv)a $X_n = Op(1),\ Y_n = Op(1) \quad \Longrightarrow \quad X_n + Y_n = Op(1)$

証明：(iii) だけ証明しよう。

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M < \infty \quad s.t. \quad P\{|X| \geqq M\} < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1}$$

ここで、$M \in C_X$, $-M \in C_X$ とできる。

よって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} P\{X_n \leqq -M\} = P\{X \leqq -M\}$

$$\lim_{n\to\infty} P\{X_n \leqq M\} = P\{X \leqq M\}$$

十分大きい n_0 をとると、

$$n > n_0 \quad \Longrightarrow \quad |P\{X_n \leqq -M\} - P\{X \leqq -M\}| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

$$|P\{X_n \leqq M\} - P\{X \leqq M\}| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$

(1),(2),(3) より、$n > n_0 \quad \Longrightarrow \quad P\{|X_n| > M\} < \varepsilon$

$n \leqq n_0$ のとき、$\exists M_n \quad s.t. \quad P\{|X_n| > M_n\} < \varepsilon$

$M' = \max\{M_1, \cdots, M_{n_0}, M\}$ とおくと、

$\forall n \quad P\{|X_n| > M'\} < \varepsilon$. ゆえに、$X_n = Op(1)$. 証明終