2021.08.09(月４)

ZOOM

Prop.C13. $\Sigma : p \times p$ 正則とする。

$\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$

$\iff$ $\boldsymbol{X}$ は p.d.f. $(2\pi)^{-\frac{p}{2}}|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\exp\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\}$ を持つ。

$\because$ $(\Longrightarrow)$ $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mu} + A\boldsymbol{Z}$

$\boldsymbol{Z}$ の p.d.f. $\phi(\boldsymbol{z}) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}}\exp(-\frac{1}{2}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z})$

このとき、$\boldsymbol{X}$ の p.d.f. は

$f(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}))|J|, \qquad J = det(\dfrac{\partial z}{\partial x})$

さて、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\mu} + A\boldsymbol{z}$ より

$\boldsymbol{z} = A^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})$

$\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'(A^{-1})'A^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}) = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})$

$J = det(A^{-1}) = \dfrac{1}{|A|}$

$|\Sigma| = |AA'| = |A|^2$ よって、$f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}}|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\exp\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\}$

$(\Longleftarrow)$ $\boldsymbol{Z} = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})$ とおくと

$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}, \quad J = det(\dfrac{\partial x}{\partial z}) = \pm|\Sigma|^{\frac{1}{2}}$ ゆえ、$|J| = |\Sigma|^{\frac{1}{2}}$.

よって、$\boldsymbol{Z}$ の p.d.f. は、$f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{z}))|J| = (2\pi)^{-\frac{p}{2}}\exp(-\frac{1}{2}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z})$

$\therefore \quad \boldsymbol{Z} \sim N_p(\boldsymbol{0}, I_p)$

$\therefore \quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mu} + \Sigma^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Z} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$

2021.08.09(月４)

ZOOM

Prop.C14.（正規分布の１次変換）

$\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$

$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{a} + B\boldsymbol{X} \quad a : q \times 1, \quad B : q \times p$ 定数

$\Longrightarrow$

$\boldsymbol{Y} \sim N_q(\boldsymbol{a} + B\boldsymbol{\mu}, B\Sigma B')$

$\because$ $\exists \boldsymbol{Z} \sim N_r(\boldsymbol{0}, I_r), \ \exists A : p \times r$

$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mu} + A\boldsymbol{Z}, \ \Sigma = AA'$

このとき、

$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{a} + B\boldsymbol{X} = \boldsymbol{a} + B(\boldsymbol{\mu} + A\boldsymbol{Z}) = (\boldsymbol{a} + B\boldsymbol{\mu}) + (BA)\boldsymbol{Z}$

Prop.C12 から

$\boldsymbol{Y} \sim N_q(\boldsymbol{a} + B\boldsymbol{\mu}, \Phi)$

ここに、$\Phi = (BA)(BA)' = BAA'B' = B\Sigma B'$

系.（周辺分布）

$$\boldsymbol{X} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} q \\ \\ \end{array} \end{array} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma), \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} q \\ \\ \end{array} \end{array}, \quad \Sigma = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} q \\ \\ \end{array} \end{array},$$

$\Longrightarrow$

$\boldsymbol{X}_1 \sim N_q(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_{11})$

$$\because \quad \boldsymbol{X}_1 = \begin{array}{c} p-q \\ \begin{bmatrix} I_q : O \end{bmatrix} \end{array} \boldsymbol{X}$$

Prop.C15. $\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ とする。 $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}$ と書く。

$$\boldsymbol{X}_1 \perp\!\!\!\perp \boldsymbol{X}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad cov(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2) = O$$

$\because$ $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$ と書く。

$(\Longrightarrow)$

$$\begin{aligned} cov(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2) &= E(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_1)(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)' \\ &= E(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_1) \cdot E(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)' = O \end{aligned}$$

$(\Longleftarrow)$ $r = \mathrm{rank}\Sigma_{11},\ s = \mathrm{rank}\Sigma_{22}$ とする。
　このとき、$\mathrm{rank}\Sigma = r + s$

$$\therefore \quad \exists \boldsymbol{Z} \sim N_{r+s}(\boldsymbol{0}, I_{r+s}), \quad \exists A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} q \\ p-q \end{array} \quad : p \times (r+s)$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mu} + A\boldsymbol{Z}, \quad AA' = \Sigma$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{\mu}_1 + A_1\boldsymbol{Z} \\ \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{\mu}_2 + A_2\boldsymbol{Z} \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1A_1' = \Sigma_{11} \\ A_2A_2' = \Sigma_{22} \\ A_1A_2' = \Sigma_{12} = O \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \mathrm{rank}A_1 = r \\ \mathrm{rank}A_2 = s \end{cases}$$

　よって、A_1, A_2 の行から、それぞれ r, s 個の正規直交ベクトルをとり、それらを行とする行列 $P \in O(r+s)$ を作れば

$$\therefore$$
$$\exists B = \begin{array}{c} \\ p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad r & \quad s \end{array} \\ \begin{bmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{bmatrix} \end{array}, \ A = BP$$

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_1 \\ \boldsymbol{W}_2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} r \\ s \end{array} := P\boldsymbol{Z}$$ とすれば、Prop.C10 より

$$\boldsymbol{W} \sim N_{r+s}(\boldsymbol{0}, I_{r+s})$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{W}_1 \perp\!\!\!\perp \boldsymbol{W}_2$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mu} + A\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\mu} + BP\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\mu} + B\boldsymbol{W}$$

$$\therefore \quad \left. \begin{array}{l} \boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{\mu}_1 + B_1\boldsymbol{W}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{\mu}_2 + B_2\boldsymbol{W}_2 \end{array} \right\} \perp\!\!\!\perp$$

Def.C5　$X_1, \cdots, X_n$　*i.i.d.*　$N(0,1)$ のとき
　$W = X_1^2 + \cdots + X_n^2$
の分布を自由度 n の χ^2 分布といい、$W \sim \chi_n^2$ で表わす。

Prop.C16.　χ_n^2 の p.d.f. は

$$f_n(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad , \quad x > 0$$

Prop.C17.（再生性）

$$X \sim \chi_m^2,\ Y \sim \chi_n^2,\ X \perp\!\!\!\perp Y \quad \text{ならば} \quad X + Y \sim \chi_{m+n}^2$$

Prop.C18.　$\boldsymbol{X} \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma),\ \Sigma$: 巾等, $\mathrm{rank}\Sigma = r$
ならば　$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} \sim \chi_r^2$

証明 : $V'\Sigma V = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{Z} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_1 \\ \boldsymbol{Z}_2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} r \\ p-r \end{array} := V'\boldsymbol{X} \sim N_p(\mathbf{0}, V'\Sigma V)$$

ゆえに $\begin{cases} \boldsymbol{Z}_1 \sim N_r(\mathbf{0}, I_r) \\ \boldsymbol{Z}_2 = \mathbf{0} \qquad (w.p.1) \end{cases}$

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}_1'\boldsymbol{Z}_1 \sim \chi_r^2$$

Prop.C19.　$\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$,　Σ : 正則
ならば　$(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi_p^2$

理由 : $\boldsymbol{Z} := \Sigma^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})$ とする。
$\boldsymbol{Z} \sim N_p(\mathbf{0}, I_p)$

Def.C6.　$X_1, \cdots, X_n$　$i.i.d.$　$N(0,1)$

$$W = (X_1 + \mu)^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

の分布を、自由度 n, 非心母数 (non-central) $\lambda = \mu^2$ の非心 χ^2 分布といい、

$$W \sim \chi'^2_{n,\lambda} \quad \text{で表わす。}$$