線形代数学 II（稲葉）　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　No.k12

2015.01.14(木２)

国文 D311

（演習問題 12）【最終版】：

この資料は、1/14 の講義の際に、皆さんから頂いた質問に対して、コメントを作成したものです。前半は講義の内容に関すること、後半は定理の証明となっています。

また、前半は、テキストの本文に記述されていること、講義内演習問題、その他の順で、後半は、定理の該当頁の順で記述しています。

この 1/15 の午後 13 時に公開している資料は最終版（第 1 版からの改訂部に【改訂】 と記述）ですが、内容についての疑問点などがございましたら、稲葉のメールアドレス (**inaba@kobe-u.ac.jp**) 宛てに、1/18(月) 午後 5 時までに連絡をお願いします。すべてに対応する事はお約束できませんが、この最終版を再改訂する必要がある場合は、1/19(火) 午後 5 時までに行いたいと考えております。

1. ここまでの講義で扱った内容で、再度、解説してほしいことがあれば、その質問内容を下記に書いて下さい。

1.A. テキスト（本文）

この節では、テキストでの記述のうち、本文に記載されている内容を扱う。

1.A.1. 実行列、実対称行列

実行列、実対称行列が、どういう状態か分からない

$\Longrightarrow$ 　はじめに、定義、適用範囲の 3 つに分けて、解説を行います。

0) はじめに（概要）

実行列という言葉や、実対称行列という言葉は、教科書に頻繁に登場します。しかし、どこから、どこまで、前提となっているのか、ごちゃごちゃになっているのではないでしょうか？

まず、実行列と実対称行列の定義から述べ、どこで、どう前提となっているかを説明します。

1) 実行列の定義

行列 A が m 行、n 列とします。このとき、第 i 行で第 j 列の要素を a_{ij} で表現します。このとき、略記法として、$A = [a_{ij}]$ と書くことにします。行列 A が 実行列 とは、「A のすべての要素 a_{ij} が実数であること」で定義します。

2) 実対称行列の定義

ある行列 A の転置行列を ${}^tA = [a_{ji}]$ で表わすとき、行列 A が 対称行列 であるとは、「$A = {}^tA$ が成り立つこと」で定義します。

更に、実行列が対称行列であるとき、実対称行列 と言います。

3) どの範囲で実行列を前提としているか

教科書の 5 章では、実数体を前提として話を進めていますが、ほとんどの定理が修正なく複素数体でも成り立ちます。最後の 5.4 節は、実数であると明記されていますが、命題の表現を変えること (p.110：複素数体上の対角化) で成り立ちます。6 章の内積は、実数体を前提に記述されています。「実対称行列が直交行列で対角化できる」という命題も、実対称行列に対してのみ成り立ちます。

これらを複素数体で考えるには、内積から変更して「9 章のエルミート内積」を考える必要があります。詳しくは、すべて 9 章にまとめられていますので、興味のある方は読んでみて下さい。

4) 今回の試験範囲として

今回の試験範囲としては、実数体に限定されていると考えて下さって構いません。ただし、5 章で述べられていることは、そのほとんどが実数であることは必要ないことは理解しておいて下さい。

1.A.2. 線形写像

5.1 節：線形写像、線形写像の像と核について、それがどういうものなのか

$\Longrightarrow$　まず、線形写像の定義、次に像と核の定義、これらの意味などを説明します。

1) 線形写像の定義

線形写像とは、和と定数倍の操作を、先に行っても後に行っても結果が変わらない、という性質をもつ写像の総称です。その定義を式で表現すると、以下の通りです。

定義（線形写像）：$U,\ V$ がベクトル空間とする。

$T: U \to V$ が、$\boldsymbol{R}$ 上の <u>線形写像</u> であるとは、次の (1)(2) を満たすこと。

(1) $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}) \qquad (\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \in U)$

(2) $T(c\boldsymbol{u}) = cT(\boldsymbol{u}) \qquad (\boldsymbol{u} \in U,\ c \in \boldsymbol{R})$

2) 像と核の定義

線形写像 $T: U \to V$ には、元の集合 U のすべての元 $\boldsymbol{u}$ の移った先全体という「像」という概念があります。具体的な意味は、3) で示す。また、核とは、行き先の $\boldsymbol{0}_V$ に移る U の元全体です。つまり、T で移すと原点と区別ができなくなる U の元全体です。

定義（線形写像の像と核）：T がベクトル空間 U から V への線形写像とする。

$$Im(T) = \{T(\boldsymbol{u})|\ \boldsymbol{u} \in U\}$$

$$Ker(T) = \{\boldsymbol{u} \in U|\ T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}_V\}$$

このとき、$Im(T)$ を T の <u>像</u>、$ker(T)$ を T の <u>核</u> という。

3) 像の意味

例えば、3 次元の空間から 3 次元の空間への線形写像を考えているとき、$U = V = \boldsymbol{R}^3$ です。このとき、A のランクによって、$T(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$ の動ける範囲が変わります。$rank(A) = 3$ のときは、像は $\boldsymbol{R}^3$ 全体となります。$rank(A) = 2$ のときは、像は平面上になります。$rank(A) = 1$ のときは直線、$rank(A) = 0$ のときは $A = O$ であり像は原点のみとなります。

4) 核の意味

例えば、3 次元の空間から 3 次元の空間への線形写像を考えているとき、$U = V = \boldsymbol{R}^3$ です。このとき、A のランクによって、$T(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{u}$ の範囲が変わります。$rank(A) = 3$ のときは、核は原点のみです。$rank(A) = 2$ のときは、核は直線上になります。$rank(A) = 1$ のときは平面、$rank(A) = 0$ のときは $A = O$ であり像は空間全体となります。

5) 像と核の関係

上の例でも分かるように、像と核の次元は、和が一定になります。これが定理 5.1.2 です。そもそも、像と核は、各々ベクトル空間になります。これが定理 5.1.1 です。

1.A.3. 2 次形式

【小改訂】 6.4 節：2 次形式の表し方のところがわかりにくい、2 次形式がなかなか理解できない

$\Longrightarrow$　2 次形式は、実対称行列 B に対して考えて下さい。このとき、6.3 節の定理 6.3.3 より、ある直交行列 P があって、必ず、対角化できます。

また、対角化できると、正の固有値の数、負の固有値の数の話に持っていけます。

つまり標準化や 2 次形式の符号の話に繋がります。

では、なぜ、一般の実行列 A から始めても、実対称行列 B での 2 次形式と一致するのでしょうか？

これは、2 変数の場合でいうと、$3xy + 1yx = 4xy$ のように、xy の係数と yx の係数は加えて計算されるからです。足して 4 になれば同じ 2 次形式となるので、$2 + 2 = 4$ と考えて、$2xy + 2yx = 4xy$ と考えたのが、実対称行列 B の話です。一般的にはテキストに記述されているように、

$$b_{12} = b_{21} = \frac{a_{12} + a_{21}}{2}$$

と計算すれば ok です。

また、2 次形式の話が理解しにくいとのことですが、常に 2 変数で例を考えてみることをお勧めします。

例えば、$x^2 + y^2 = 1$ は円ですし、$x^2 + 4y^2 = 1$ は楕円です。このように、xy の係数がゼロの場合、x^2 と y^2 の係数が共に正であれば楕円になります。$-x^2 - 4y^2 = 1$ には解がありません。係数が共に負ですと、半径が複素数の楕円（虚円）となります。

これに対して、xy の係数がゼロで、x^2 と y^2 の係数が正と負になる場合は、$x^2 - 4y^2 = 1$ は双曲線となります。6.4 節で調べている「2 次形式の符号」とは、このような振る舞いの違いを分類する目的もあります。

このように、xy の係数がゼロであれば、非常に図形の分類が簡単になりますので、ゼロにしたいです。この作業のことを、「対角化」と呼んで、実対称行列に関しては必ずできることが分かっています。我々が 2 次曲線を「円、楕円、双曲線（まれに放物線）」などと分類できるのは、このような背景があると思います。

1.B. テキスト（内容）

1.B.1. 正則行列

正則行列の性質が非常に多くて混乱しています

$\Longrightarrow$ まず、正則行列 の定義は「逆行列がある」ことです。その意味では、性質は 1 つです。

恐らく、ご質問の主旨は、正則行列が色んな所に登場するこということではないかと思います。

これは、仕方ありません。というのは、正則行列という性質は、非常にゆるい（恐らく、最もゆるい）条件であり、ある変換の逆変換を考えるときでも、変換を表す行列が正則であることが、逆変換を考えられる状況ですので、何か作業する際には、正則行列は必ず登場します。そのときのコツは、定義のみに集中することです。私なら、正則行列が出てくるたびに、「逆行列がある、ってことだけやな」と思うようにしています。定義は、元の概念と同値です。つまり、それ以外は忘れても構わない、ということでもあります。

1.B.2. ベクトル空間の違う基の合併

【改訂】 ベクトル空間が違う基どうしは 1 次独立か？

$\Longrightarrow$ 恐らく、この質問は、引き続いて記述されている「次の定理 5.4.1 の証明における疑問点」のことかと思います。

ご質問では、「別々のベクトル空間だからゼロになるのか？」と書いておられますが、そうではありません。

もっと単純に、ゼロベクトルになることが示せます。

まず、各々の固有空間から、その次元 n_i 個の基を取り出して、$\{\boldsymbol{a}_{i1}, \boldsymbol{a}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{in_i}\}$ とします。

この 1 次結合を $\boldsymbol{u}_i$ とおくと、P という正則行列を用いて、右辺がゼロベクトルになる関係式が導かれます。P が正則行列なので、逆行列があり、これを左からかけると、すべての $\boldsymbol{u}_i$ がゼロベクトルであることが分かります。

この論理には、P が逆行列があること以外は使っていませんし、逆にいうと逆行列がなければ、別々のベクトル空間に属するベクトル達の関係式は出ないと思います。

結果的には、全部のベクトルが 1 次独立になるのですが、$\boldsymbol{u}_i$ 達がゼロベクトルになるのは、1 次独立性からではなく、P という行列の美しさからです。ちなみに、P が逆行列を持つことは、その行列式が 0 でないことから導かれます。

1.B.3. 固有値の概念

【小改訂】 固有値でつまづいています。教科書の p.80,86,91,97,105,111,115,120,127,135 が分からない。

　　$\Longrightarrow$ 　教科書の演習問題の全頁をご質問されていますが、これではコメントの作りようがありません。稲葉のメールアドレス（**inaba@kobe-u.ac.jp**）宛てに、多くとも 5 問程度までに絞って、優先順位をつけて質問をして下さい。

　ちなみに、固有値でつまづいているとのことですが、p.80 は、ベクトルの 1 次独立の話です。せめて、どちらかに絞っていただければ、嬉しいです。一般的に言って、このような「質問をしてください」というリクエストに対して、できるだけ相手から労力を引き出すためには、より具体的な質問が有利です。

　固有値 について、一言。固有値とは、対角化できた行列においては、各々の成分がばらばらに議論できる、という大きなメリットがあるので、その世界で考えよう、という概念です。特定の固有ベクトルの方向において、この行列をかけること（操作すること）が、定数倍と同じになるという考え方でもあります。

　対角化などと併せて、その意義を理解するようにされると、勉強する意義が感じられやすいかと思います。

　1 次独立について、一言。1 次独立とは、例えば連立 1 次方程式であれば、無駄な式を除きたい、という考えに似ています。無意味な式を除くと、残された式は、他の式からは導けません。このような考え方を、定数倍の和がゼロになるには、各係数がゼロに限る、と考えるわけです。

1.B.4. 行列の対角化

【改訂】 行列の対角化について。$B = P^{-1}AP$, P は正則行列、B は対角行列とする。ここで、$r = n$ のとき、$B = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ ですか？

　　$\Longrightarrow$ 　これは、ご質問の通りです。n 個の相異なる固有値である場合には、そのまま、n 個の固有値を並べた対角行列で対角化できます。理由は、固有値には必ず 1 つ以上の固有ベクトルがあり、相異なる固有値に対応する固有ベクトルどうしは、互いに独立になるからです。つまり、固有ベクトルを 1 つ以上集めてくると、n 本以上の独立なベクトルの集合ができるので、これらが対角化を実現しているからです。

1.B.5. 固有空間の基による対角化

【改訂】 教科書の例題 5.4.2 でなぜ固有空間の基を 3 つ並べると P の列ベクトルになるのか？

　　$\Longrightarrow$ 　例題 5.4.2 においては、3 つの固有ベクトルが 1 次独立に求められています。このような時、定理 5.4.2 の十分性の議論より、この 3 つのベクトルを列ベクトルとする行列 P で対角化できます。

　これに対して、対角化できない場合もあります。次の例題 5.4.3 は、対角化できない例です。その意味では、いつも、固有空間の基を並べると、P が求められるわけではありません。

　では、どういうときに、並べるとできるか、ということが問題となりますが、これについては、定理 5.4.2 より、対角化ができる必要十分条件として、「各々の固有空間の次元（つまりは基の個数）の和が、元の空間の次元（今回は３）に一致」が分かっています。

　したがって、対角化できるかどうかは、例題 5.4.2 のように 3 つのベクトルがあればできることになります。なお、列ベクトルが 1 次独立になれば、定理 4.3.4 より、その行列は正則行列になります。つまり、P は正則行列となり、この P で対角化できます。

（第 1 版では、誤解がありましたが、定理 5.4.2 で対角化の可能かどうかの判定ができます。）

1.C. 講義内演習問題

1.C.1. 演習 3 の 2 番

【改訂】 演習 3 の 2 番：$\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^m$ への線形写像 T は、適当な $m \times n$ 行列 A を用いて、

$$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

と書けることを示せ。

$\Longrightarrow$ 　基本的に、ベクトル空間の元は、必ず基の 1 次結合で表現することができます。

今、元の n 次元空間における元 $\boldsymbol{x}$ を、n 個の成分で表現しているとき、実は、これらは基本ベクトルと呼ばれる単位ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0), \quad \cdots, \boldsymbol{e}_n = (0, \cdots, 0, 1)$$

の 1 次結合で

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

のように書けているとも考えられます。

また、一般のベクトル $\boldsymbol{x}$ の行き先は、線形写像の場合、実は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の行き先さえ分かれば、再現できることになっています。これは、線形性が、和と定数倍に関して、順序を変えても結果が同じだからです。

では、移った先は、どうでしょうか？　移った先も、m 次元の空間ですから、m 個の基本ベクトルの 1 次結合で表現できます。

つまり、元の基本ベクトルの移った先が、行き先の基本ベクトルでどう表現されるか（これが A の中身なのですが)、これが決まると、すべての $\boldsymbol{x}$ の行き先が決まる、というのが、この演習問題の主旨です。

この問題が分かると、線形性が分かる、というぐらい大事な定理の証明でした。

1.C.2. 演習 6 の 1) の 1-4)

演習 6 の 1) の 1-4)：$\mathbf{0} \in W(\lambda; T)$ において、$\mathbf{0}_V \in W(\lambda; T)$ ではなくて、$\mathbf{0}_U \in W(\lambda; T)$ を証明している理由

$\Longrightarrow$ 　私は、$T : U \to V$ と考えています。なぜ、このように考えたかというと、5.1 節や 5.2 節では、テキストも区別しているからです。ただ、5.3 節は、「変換」を扱っています。変換とは、元の集合と行き先の集合が同じ場合ですから、元の集合か行き先の集合かは違いますが、記号としては同じ集合を想定します。その意味で、テキストでは、これらを区別していません。

私が強調したかったのは、固有空間の定義です。そのために、T は線形変換ですが、U の元 $\boldsymbol{u}$ に対して、V の元 $\boldsymbol{v} = T(\boldsymbol{u})$ を対応させるという考え方をしてみました。

ここで、固有空間の定義を思い出して下さい。定義は「$T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$ を満たす $\boldsymbol{u}$ の集まり」ということでした。つまり、固有空間は、「U の元の集まり」、つまりは「U の部分集合」であると考えると良いと思います。

ご質問のあった、なぜ $\mathbf{0}_U$ を証明しているか、ということに対しては、そもそも U の元であることが全体だと稲葉が考えているからです。

1.C.3. 演習 6 の 1) の 1-3)

演習 6 の 1) の 1-3)：またその過程で $0(\lambda\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$ となっている理由

$\Longrightarrow$ 　この理由も、上の 1-4) に対するコメントと、ほぼ同じです。$\lambda\mathbf{0}_U = \mathbf{0}_V$ を示しているのは、元の U のゼロベクトルを T で移すと、V のゼロベクトルになることを示してほしいと考えたからです。

1.D. その他

1.D.1. 期末試験対策

1.D.1. 期末試験対策は、どこを中心に勉強したら良いのか

$\Longrightarrow$ まずは、前から丁寧に勉強することをお勧めします。基本的な用語の定義や、概念（考え方）は、最初は難しく感じるかもしれませんが、講義をきいて、色々感じたことを踏まえて、もう一度、教科書を読み直して下さい。そのとき、自分で用語集を作ったり、定理をイメージする流れ図を作るなど、工夫してみて下さい。

その上で、少し、私なりのコメントをします。

まず始めに、前期の内容の確認が必要です。連立 1 次方程式の解法は必須です。

次に、ベクトル空間の定義でしょうか。1 次独立の定義も極めて重要です。この辺りの概念の習得には、講義の演習で行った証明問題が有効だと考えています。

これらがイメージできたら、ベクトル空間の次元（1 次独立な最大本数）や、解空間とランクの和が一定になる定理 4.4.3 が最重要です。

線形写像の勉強に入る前に、４章を固めることから始めるのがお勧めです。

4 章の概念が頭に入っていると、5 章の話が理解しやすくなります。6 章は、これら 2 つの章の内容があると、それほど難しくありません。

以上が、稲葉の個人的なイメージです。

2. ここまでの講義で扱った定理の証明で、再度、解説してほしいものがあれば教科書の頁数と定理の番号を書いて下さい。

定理 5.1.1(2 人) : T がベクトル空間 U から V への線形写像とする。

(1) T の像 $Im(T)$ は V の部分空間である。

(2) T の核 $ker(T)$ は U の部分空間である。

この定理の証明で、最初に考えるべきことは、「部分空間」とは何か、ということです。

部分空間とは、部分集合であって、かつ、元のベクトル空間と同じ構造を持っている、ということが、定義です。したがって、部分集合であれば、元のベクトル空間と同じ性質をもつことは、ほとんどの性質に関しては自明ですから、唯一、ゼロベクトルをこの集合が持っていることのみを示して下さい。

もちろん、部分集合として、線形性をもつために、和と定数倍について、外に飛び出さないことを示す必要は残っています。

このような考え方によって、テキスト p.64 の「定理 4.1.1」にある 3 条件を示せば、この定理が示せます。これが、この定理の背景です。あとは、演習問題の解答例を参考にして下さい。

また、この資料の 1.A.2 項「線形写像」の項も参考にして下さい。

【改訂】**定理 5.1.2**(2 人) : T がベクトル空間 U から V への線形写像とする。

$$null(T) + rank(T) = dim(U)$$

この定理は、2 つの異なるベクトル空間で作られた基を、併せた集合が、元の空間の基になっていることを示す流れになっています。

普通は、このようなことが成り立つことはありませんが、核の概念と、像の概念が非常に相性が良い、ということです。詳細な証明については、以下に概要を記します。

最初に、$ker(T)$ と $Im(T)$ から、基を持ってきます。

通常、異なるベクトル空間から持ってきたベクトルは、合併して議論することはできません。しかし、この 2 つの集合は、いずれも、$T : U \to V$ が線形写像であることから、像は V の元、核は U の元で、かつ、像の定義より像の基は T で 移ってくる元の集合 U の元が必ずあります。このようにして、両方の基から、U の元の話に持って行きます。

補足：これを逆に、核の定義を用いて、V の元で議論しようとしてもうまくいきません。なぜか、と言いますと、V には、どの U の元からも移ってこない、いわゆる無駄な部分が有り得るからです。この定理 5.1.2 のポイントは、元の集合である U での基の話に帰着するところです。

一般的に言って証明の難しさは、アイデアの部分で、このような基本的なイメージがないときに「なぜ、このように考えるのか分からない」という疑問となります。いったん、証明を読んだ後、数日を置いて、また、自力で証明を構成しようと試みて下さい。そうすると、自分の中で、何が定着していて、何が思いつけないアイデアであるかが明確になります。稲葉は、そのように日々、続けているに過ぎません。

後は、U を生成することと、1 次独立であることの 2 点を示せば十分です。具体的に、@@@の部分の理由が分からない、ということがあれば、また、ご質問下さい。

【改訂】定理 5.3.2（ケーリー・ハミルトンの定理）（3 人）：結果的に、$t = A$ とおいて計算できる理由は？

$\Longrightarrow$　まず、$t = A$ として単純に計算してはいけない理由を述べ、それが、解消される理由を述べます。

最初に、$(**)$ 式が導かれます。これは、t という実数が係数になっているので、行列式の計算において括り出せることが背景になっています。つまり、t がスカラーで無ければ、この式は成り立つかどうか分かりません。したがって、単純に代入することは許されません。

これに対して、教科書の p.101 の下から 6 行目以降、4 つの等号がありますが、いずれも、行列の計算として、A のべき乗どうしの交換法則のみを用いて計算をしているに過ぎません。結果として、$g_A(t)$ の式の、t に A を代入した式を導いています。$(**)$ 式の t に A を代入して、等しいと考えたのではなく、$g_A(t)$ を t の多項式として係数を $1, b_{n-1}, \cdots, b_0$ とおいて証明したので、問題はないと思います。

【小改訂】定理 6.4.1

$\Longrightarrow$　この定理は、2 次形式が対角化できることを述べています。

最初に、実対称行列を考えてみてください。すると、定理 6.3.3 によって、直交行列で対角化できることがわかります。

ちなみに、対角化した後、そのゼロでない対角成分の数は、対角行列のランクに等しいです。昨日の講義でも述べた「$A = P^{-1}BP$ のとき、$rank(A) = rank(B)$」が成り立ちますので、A のランク m と B のランクが一致します。これが、定理 4.3.3 です。

以上です！