3.A. **最大値の存在定理（「実数の連続性」を用いた解説）** （第３版：2005-08-03 版）

この資料は、「微分積分学」の講義において、「最大値の存在定理」の解説を試みたものである。「微分積分学」の講義では、数列の極限や関数の極限の定義として、厳密な定義（一般的に、「$\varepsilon - \delta$ 論法」と呼ばれるもの）を用いていない。

実は、最大値の存在定理は、極限に関する厳密な定義無しには説明すら不可能である。極限に関する厳密な定義を用いると、「実数の連続性」と呼ばれる「実数」の正確な定義が可能となる。この、実数の連続性から、閉区間で連続な関数は最大値があることが示される。

そこで、１節では、関数の極限についての正確な定義を述べ、２節では、実数の連続性の背景である実数の定義を、３節では、切断の概念を述べる。４節では、これらのことを踏まえて実数の連続性を説明し、５節では、最大値の存在定理を述べ証明を与える。最後に６節では、４節で述べた実数の連続性を意味する定理の証明を与える。

なお、以下の定理番号や表現、証明の方針等は、以下の本を全面的に参照した。非常に厳密で正確な記述をされた高木貞治氏に感謝の意を表したい。

参考文献：「解析概論 改訂第３版 軽装版」高木貞治著、岩波書店、2,940 円 (税込)

3.A.1. **極限の厳密な定義**

1) **数列の極限**の定義

厳密な意味での **数列の極限**の定義は、以下の通りである。

$\lim_{k\to\infty} a_k = \alpha$ とは、

「任意の正の数 ε に対して、ある番号（自然数）k_0 があって

$k \geqq k_0$　ならば　$|a_k - \alpha| < \varepsilon$

が成り立つ。」

ように出来ること。

2) **関数の極限**の定義

また、厳密な意味での **関数の極限**の定義は、以下の通りである。

$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ とは、

「任意の正の数 ε に対して、ある正の数 δ があって

$0 < |x - a| < \delta$　ならば　$|f(x) - \alpha| < \varepsilon$

が成り立つ。」

ように出来ること。

3.A.2. **実数の定義**

実数の定義について概要を述べる。実数は、自然数から、整数、有理数をへて、定義される。

まず、**自然数**全体の集合 $\{1, 2, 3, \cdots\}$ は、**ペアノの公理** から定義される。

ペアノの公理：以下の４つが満たされるとき、A は自然数の集合という。

1）A は、空集合ではない。(元を１つはもつので、これを "1" と呼ぶ。)
2）A の任意の元 "n" があるとき、次の元 "$n+1$" も A に存在する。
3）どの元の次の元も、"1" ではない。
4）異なる２つの元の次の元同士は異なる。

説明：上記の２）を繰り返して、"1" $\Longrightarrow$ "2" $\Longrightarrow$ "3" $\Longrightarrow \cdots$ のように作れる。
３）４）は、これらがループになっていないことを意味する。

次に「(自然数) 引く (自然数)」という引き算の答えとして、新しい数 $\{0, -1, -2, -3, \cdots\}$ が導かれる。ここで自然数全体に、0 や負の数を加えた集合を「**整数**」と定義する。このとき整数全体 $\{0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}$ で引き算を行っても、結果は整数である。

次に、**有理数**は、「(整数) 割る (自然数)」で定義される。割り算は 0 以外で割ると定義すると、「(有理数) 割る (有理数)」を行っても、結果は有理数で新しい数は現れない。

また、２乗すると２になる数 $\sqrt{2}$ が有理数でないことから、これらを含む「**実数**」を「有理数列の極限」で定義する。($a_0 = 1,\ a_1 = 1.4,\ a_2 = 1.41,\ a_3 = 1.414,\ a_4 = 1.4142,\ a_5 = 1.41421,\ \cdots$ のように)

3.A.3. 実数の切断

実数の連続性を述べるのに、Dedekind の切断から始めると、非常に明確に概念が整理できる。

(定義)　すべての数を A, B の二組に分けて、A に属する各数が B に属する各数よりも常に小さくなるようにできたとするとき、このような組分け (A, B) を **Dedekind の切断**といい、A を下組、B を上組という。

切断の性質　$x > y,\ y \in B \quad \Longrightarrow \quad x \in B$

証明：$x \in A$ とすると切断の定義より、$x < y$ となるはず。これは、$x > y$ に反する。
したがって、$x \notin A$. よって、$x \in B$. **(証明終)**

今、一つの数 s をとって、s より小さい数をすべて下組に入れ、s より大きい数をすべて上組に入れるとき、更に s をどちらかの組に入れると切断が完成する。s を下組に入れた場合、下組には最大値があり上組には最小値はない。s を上組に入れた場合、上組には最小値があり下組には最大値はない。つまり、一つの数から切断を構成できる。

重要なのはこの逆である。実数の集合は、この逆が成り立つ。(整数や有理数の集合は、成り立たない。) 即ち、切断 (A, B) が与えられたとき、一つの数が決まる。これが、実数の連続性と呼ばれる性質である。

定理１：Dedekind の定理

実数の切断は、下組と上組との境界として、一つの数を確定する。

3.A.4. 実数の連続性とは？

実は、次の４つの命題（定理）が同値である。同値とは、正しいか、間違っているか、が一致していることを意味する。そして、「実数の連続性」は、自然数から整数、有理数、実数を定義する際に、重要な意味を持つ。

有理数の極限として実数を定義し、更に「実数列の極限が実数である」ということが「実数の連続性」である。即ち、実数全体の集合において「数列の極限」を考えても、これ以上の「新しい数」は作れないのである。

(1) **定理１：Dedekind の定理**

実数の切断は、下組と上組との境界として、一つの数を確定する。

(2) **定理２：上限又は下限の存在（Weierstrass の定理１）**

$\boldsymbol{R}$ の部分集合 A が (空でなく) 上に有界ならば、A の上限が存在する。

(3) **定理６：(有界な単調数列の収束)**

上に有界な数列が単調増加ならば、収束する。

(4) **定理７：(区間縮小法)**

有限閉区間を項とする集合列 $\{I_n\}$ が「$I_{n+1} \subset I_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$」を満たすならば、すべての I_n に同時に含まれる実数が少なくとも１つ存在する。

証明は、６節で以下のように示される。

$$\text{定理1} \implies \text{定理2} \implies \text{定理6} \implies \text{定理7} \implies \text{定理1}$$

3.A.5. 最大値の存在定理の証明

3.A.5.1. 最大値の存在定理の証明の概要

まず、最大値の存在定理とは、次の定理のことである。

(6) **定理 13：最大値の存在定理**

$f(x)$ が有限閉区間 $[a, b]$ 上で連続ならば、$f(x)$ はそこで最大値および最小値をもつ。特に、有限閉区間上の連続関数は有界である。

この定理を示すには、次の定理が必要である。

(5) **定理９：Weierstrass の定理２**

任意の有界な数列は、収束する部分列をもつ。
（有界なる無数の点の集合に関して、集積点が必ず存在する。）

最初に、定理７から定理９を証明し、その後で最大値の存在定理を証明する。

$$\text{定理7} \implies \text{定理9} \implies \text{定理13}$$

3.A.5.2. **定理７　$\Longrightarrow$　定理９の証明**

(4) **定理７：(区間縮小法)**

有限閉区間を項とする集合列 $\{I_n\}$ が「$I_{n+1} \subset I_n \quad (n=1,2,\cdots)$」を満たすならば、すべての I_n に同時に含まれる実数が少なくとも１つ存在する。

(5) **定理９：Weierstrass の定理２**

任意の有界な数列は、収束する部分列をもつ。

証明：有界な数列 $\{a_n\}$ があるとすると、下界 b_1, 上界 c_1 があるから、有限閉区間 $I_1 = [b_1, c_1]$ に対して、$a_n \in I_1$ $(n=1,2,\cdots)$ が成り立つ。

$d_1 = (b_1 + c_1)/2$ とおいて、もし $[b_1, d_1]$ が $\{a_n\}$ の有限個しか含まないならば $b_2 = d_1$, $c_2 = c_1$ とおく。

もしも、$[b_1, d_1]$ が $\{a_n\}$ の無限に多くの項を含むのであれば、$b_2 = b_1$, $c_2 = d_1$ とおく。

いずれにせよ、$I_2 = [b_2, c_2]$ とおく。同様に、$I_3, I_4, I_5, \cdots$ を作る。

こうして得られた集合列 $\{I_n\}$ は、常に $\{a_n\}$ の無限に多くの項を含み、$I_n \supset I_{n+1}$ をみたす。

したがって、定理７より、すべての区間に属する数 a が存在する。

今から、a に収束する部分列を作る。

各 k に対して $\{a_n\}$ の項で、I_k に属するものを１つずつ取り出して、a_{n_k} とする。

このとき、$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ とすることができる。(I_k には、項が無限個あるから)

つまり、a_{n_k} が $\{a_n\}$ の部分列であるようにできる。　**(証明終)**

3.A.5.3. **定理９　$\Longrightarrow$　最大値の存在定理の証明**

(5) **定理９：Weierstrass の定理２**

任意の有界な数列は、収束する部分列をもつ。

(6) **定理 13：最大値の存在定理**

$f(x)$ が有限閉区間 $[a,b]$ 上で連続ならば、$f(x)$ はそこで最大値および最小値をもつ。特に、有限閉区間上の連続関数は有界である。

最大値存在定理の証明：値域 $\{f(x) | a \leqq x \leqq b\}$ の上限を M とする。

上限の定義によって、$f(c_n) \to M$ $(n \to \infty)$ となる $c_n \in [a,b]$ がある。

ここで定理９より、有界な数列 $\{c_n\}$ には収束する部分列 $\{c_{n_k}\}$, $k=1,2,\cdots$ がある。

この部分列を $d_k = c_{n_k}$, $k=1,2,\cdots$ 、その極限を d とおくと、$\lim_{k\to\infty} d_k = d$ となる。

この極限 d は、$d \in [a,b]$ である。(c_n が有界ゆえ)

また、$f(d) = \lim_{k\to\infty} f(d_k)$ ($f(x)$ は連続ゆえ) で、更に $\lim_{k\to\infty} f(d_k) = M$. (注１)

したがって、$f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ は、$x = d$ で最大値 M をとる。　**(証明終)**

3.A.6. 実数の連続性に関する証明

４つの命題（４つの定理）を、定理１から始めてすべて同値であることを示す。

3.A.6.1. 定理１　$\Longrightarrow$　定理２の証明

(1) **定理１：Dedekind の定理**

実数の切断は、下組と上組との境界として、一つの数を確定する。

(2) **定理２：上限又は下限の存在（Weierstrass の定理１）**

$\boldsymbol{R}$ の部分集合 A が (空でなく) 上に有界ならば、A の上限が存在する。

証明：ある部分集合 A が上に有界であるならば、上界が１つはある。これを a としよう。a よりも大きい数は、すべて上界である。

ここで、上界である数の全体を「上組」とし、上界でない数の全体を「下組」としたとき、これが切断になっていることを示す。（上組と下組は、いずれも空でない。）（注２）

その理由：上界でない数 b は、A のある元 a_0 よりも小さい。$(b < a_0)$
しかし上界である数 c は、A のどの元 x よりも以上なので a_0 以上である。

したがって、常に $b < c$ となり、切断となっている。定理１より、切断は１つの数を確定する。これは、上限である。

その理由：この数が上組の最小数であるなら、A の上界で最小なので上限となる。
この数が、下組の最大数であるなら、当然、上限でもある。

よって、定理１から、上限が存在することが示された。　**(証明終)**

3.A.6.2. 定理２　$\Longrightarrow$　定理６の証明

(2) **定理２：上限又は下限の存在（Weierstrass の定理１）**

$\boldsymbol{R}$ の部分集合 A が (空でなく) 上に有界ならば、A の上限が存在する。

(3) **定理６：(有界な単調数列の収束)**

上に有界な数列が単調増加ならば、収束する。

証明：上に有界な単調増加数列 $\{a_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ を考える。

$A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ とおくと A は空集合ではない。

仮定より A は空でない上に有界な集合となり、定理２（上限の存在定理）より上限 M がある。

M が上限であるから「$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \quad s.t. \quad M - \varepsilon < a_{n_0} \leqq M$」である。

このことと、単調性 $a_n \leqq a_{n+1}$ を用いると $n \geqq n_0$ である n に対して、$a_{n_0} \leqq a_n$ より
「$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \quad s.t. \quad \forall n \geqq n_0 \quad \Longrightarrow \quad (0 \leqq) M - a_n (\leqq M - a_{n_0}) < \varepsilon$」である。

このことは、数列 $\{a_n\}$ が M に収束することを意味する。

よって、定理２から定理６が示された。　**(証明終)**

3.A.6.3. 定理６　$\Longrightarrow$　定理７の証明

(3) **定理６：(有界な単調数列の収束)**
上に有界な数列が単調増加ならば、収束する。

(4) **定理７：(区間縮小法)**
有限閉区間を項とする集合列 $\{I_n\}$ が「$I_{n+1} \subset I_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$」を満たすならば、すべての I_n に同時に含まれる実数が少なくとも１つ存在する。

証明：$I_n = [a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおく。
$I_{n+1} \subset I_n$ より $a_n \leqq a_{n+1} \leqq b_{n+1} \leqq b_n$ である。
ここで、$m \geqq n$ であれば $a_n \leqq a_m \leqq b_m \leqq b_n$ ゆえ、$a_n \leqq b_m$ でかつ $a_m \leqq b_n$.
よって、任意の m, n に対して $a_n \leqq b_m$ である。
したがって、$\{a_n\}$ は、単調増加で、上に有界（すべての a_n が b_1 以下）であるから、定理６より極限 a がある。
また、a_n は単調増加ゆえ $a_n \leqq a$. 更に、任意の m で b_m は $\{a_n\}$ の上界ゆえ $a \leqq b_m$.
よって、任意の n について、$a_n \leqq a \leqq b_n$. つまり、$a \in I_n$ である。　**(証明終)**

3.A.6.4. 定理７　$\Longrightarrow$　定理１ の証明

(4) **定理７：(区間縮小法)**
有限閉区間を項とする集合列 $\{I_n\}$ が「$I_{n+1} \subset I_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$」を満たすならば、すべての I_n に同時に含まれる実数が少なくとも１つ存在する。

(1) **定理１：Dedekind の定理**
実数の切断は、下組と上組との境界として、一つの数を確定する。

証明：ある切断 (A, B) を用意する。即ち、実数全体を２つの集合に分類したとする。
このとき、A, B は空でないから元を１つづつ取ってこれる。$a \in A$, $b \in B$ としよう。
$\frac{a+b}{2}$ も、実数であるから、A, B のどちらかに入る。そこで、$\frac{a+b}{2}$ が A に入るときは $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$ とし、B に入るときは $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$ とする。次は、$\frac{a_1+b_1}{2}$ を考える。
このように、数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を作ると、いつも $a_n \in A$, $b_n \in B$ である。
しかも、$b_n - a_n = (b-a)/2^n$ であるから、定理７の仮定を満たす。したがって、すべての区間 $I_n = [a_n, b_n]$ に属する値 s が存在する。
これを、A に含まれるとしよう。(B に含まれる場合も全く同様に証明できる。)
s より大きい値 s' を取れば $b_n \to s$ （注３）より、$s < b_n < s'$ となる b_n がある。
したがって、切断の性質（$x > y \in B$ ならば $x \in B$）より、s' は B に含まれる。
このとき、s は A の最大数である。また、B には最小数はない。
よって、定理７から、定理１が導かれた。　**(証明終)**

3.A.7. 参考文献

「解析概論 改訂第３版 軽装版」高木貞治著、岩波書店

3.A.8. 付録：（注１）、（注２）、（注３）の説明

今までの証明中で、説明の足らない点を補足する。

3.A.8.1. （注１）の説明

（注１）は、定理９から定理 13 を示す証明の中で出てきた。

部分列 $\{d_k\}$ について、その関数値の極限が $f(d)$ に一致し、更に、$f(c_n)$ 全体の上限 M に収束するという２つの内容を意味している。

（注１）の前半 $f(d) = \lim_{k\to\infty} f(d_k)$ **の説明：**

まず、関数 $f(x)$ が $x = d$ で連続ゆえ、

「$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \quad s.t. \quad |x - d| < \delta \quad\Longrightarrow\quad |f(x) - f(d)| < \varepsilon$」である。

次に、数列 $\{d_k\}$ が d に収束することから

「$\forall\varepsilon' > 0,\ \exists k_0 \quad s.t. \quad k \geqq k_0 \quad\Longrightarrow\quad |d_k - d| < \varepsilon'$」である。

ここで、$\varepsilon' = \delta$ とおき、$x = d_k$ の場合を考えると、以下の内容が成り立つ。

「$\forall\varepsilon > 0,\ \exists k_0 \quad s.t. \quad k \geqq k_0 \quad\Longrightarrow\quad |f(d_k) - f(d)| < \varepsilon$」である。

これは、$f(d) = \lim_{k\to\infty} f(d_k)$ を意味する。**（前半の説明終）**

（注１）の後半 $\lim_{k\to\infty} f(d_k) = M$ **の説明：**

まず、$f(c_n)$ の極限が M であるから、

「$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \quad s.t. \quad n \geqq n_0 \quad\Longrightarrow\quad |f(c_n) - M| < \varepsilon$」である。

次に、$d_k = c_{n_k} \quad k = 1, 2, 3, \cdots$ である。

ここで、$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ であることから、$n_k \geqq k$ である。

その理由：$n_1 \geqq 1,\ n_{k+1} \geqq n_k + 1 \geqq k + 1.$

したがって、$k_0 = n_0$ とおけば、$k \geqq k_0$ ならば $n_k \geqq n_{k_0} \geqq k_0 = n_0$ となり、
$n_k \geqq n_0$ ゆえ $f(d_k) = f(c_{n_k})$ に着目すれば、次の式が成り立つ。

「$\forall\varepsilon > 0,\ \exists k_0 \quad s.t. \quad k \geqq k_0 \quad\Longrightarrow\quad |f(d_k) - M| < \varepsilon$」である。

これは、数列 $\{f(d_k)\}$ の極限が M であることを意味する。**（後半の説明終）**

3.A.8.2. **（注２）の説明**

（注２）は、定理１から定理２を示す証明の中で出てきた。
上界か、そうでないかで上組と下組に分けた際に、「上組と下組は、いずれも空でない。」という性質である。

説明：上組が空でない理由は、A が上に有界で、上界が１つはあるからである。
下組が空でない理由は、まずは、A が空でないから $a_1 \in A$ がある。
次に、a_1 より小さい実数は、上組には入らない。なぜなら、a_1 より小さい実数は、A の上界になれないからである。
上界になれなければ、下組になり、下組は空でない事が分かる。 **（説明終）**

3.A.8.3. **（注３）の説明**

（注３）は、定理７から定理１を示す証明の中で出てきた。
すべての $I_n = [a_n, b_n]$ に含まれる s があるとき、「$b_n \to s$」となる性質である。

説明：s は、すべての I_n に含まれるから、$a_n \leqq s \leqq b_n$ である。
したがって、$|b_n - s| \leqq |b_n - a_n|$ であり、この右辺は、0 に近づく。
0 以上の数列が、0 に近づく数列で押さえられている場合は、はさみうちの原理より、$|b_n - s| \to 0$ と分る。 **（説明終）**